UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Čapljina, 28. ožujka 2015.

I. RAZRED

Zadatak 1.

Ako za realne brojeve x, y **vrijedi**

$$x^2 + xy + y^2 = 4$$

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = 8$$

dokaži da je $x^6 + x^3y^3 + y^6$ **prirodan broj i odredi ga.**

RJEŠENJE

Za dokaz da je zadani izraz prirodan broj dovoljno ga je izračunati. Prvi korak je iz danih jednakosti odrediti vrijednost izraza $x^2 + y^2$ **i** xy**. To je moguće na više (sličnih) načina. Npr. iz**

$$\begin{aligned} 8 &= x^4 + x^2y^2 + y^4 \quad \textbf{(*)} \\ &= \left(x^2 + x^2\right)^2 - (xy)^2 \\ &= \underbrace{\left(x^2 + xy + y^2\right)}_{4}\left(x^2 - xy + y^2\right), \\ &= 4\left(x^2 - xy + y^2\right) \quad \Rightarrow \quad x^2 - xy + y^2 = 2 \end{aligned}$$

Zbrajanjem, a zatim oduzimanjem dobijemo:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= 4 \\ x^2 - xy + y^2 &= 2 \end{aligned}\right\} + \qquad\qquad \left.\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= 4 \\ x^2 - xy + y^2 &= 2 \end{aligned}\right\} -$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = 3 \qquad\qquad xy = 1} \quad \textbf{(**)}$$

Koristeći formulu za zbroj kubova zadani izraz $x^6 + x^3y^3 + y^6$ **možemo napisati u obliku**

$$\begin{aligned} x^6 + x^3y^3 + y^6 &= \left(x^2 + y^2\right)\left(x^4 - x^2y^2 + y^4\right) + x^3y^3 \\ &= \left(x^2 + y^2\right)\left[\left(x^4 + x^2y^2 + y^4\right) - 2x^2y^2\right] + x^3y^3 \end{aligned}$$

Uvrštavanjem (*) i (**), dobijemo $x^6 + x^3y^3 + y^6 = 19$ **.**

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

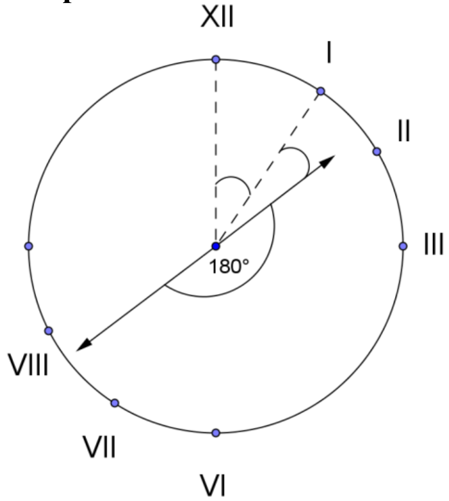
NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Čapljina, 28. ožujka 2015.

I. RAZRED

Zadatak 2. **U kojem trenutku između 13:00 i 14:00 sati mala (satna) i velika (minutna) kazaljka sata zatvaraju ispruženi kut (180°). (Zadatak se priznaje jedino uz detaljno objašnjenje rješenja.)**

RJEŠENJE

Neka se to dogodi x minuta nakon 13:00. Velika (minutna) kazaljka za jednu minutu pređe $\frac{1}{60}$ punog kruga, tj. 6°. Mala (satna) kazaljka za jedan sat pređe 30°, pa za jednu minutu pređe 0.5°.



Nakon x minuta velika kazaljka pređe $6x^\circ$ stupnjeva, a mala $\frac{1}{2}x^\circ$. Kazaljke će zatvarati ispruženi kut (180°) ako je pređeni kut velike kazaljke za 210° veći od pređenog kuta male kazaljke (mala kazaljka kreće s „1“, a velika od „12“).

Znači, vrijedi $6x = 210 + \frac{1}{2}x$, tj.

$x = \frac{420}{11} = 38\frac{2}{11}$**. Kazaljke će zatvarati ispruženi kut u 13 sati i $38\frac{2}{11}$ minuta.**

q.e.d.

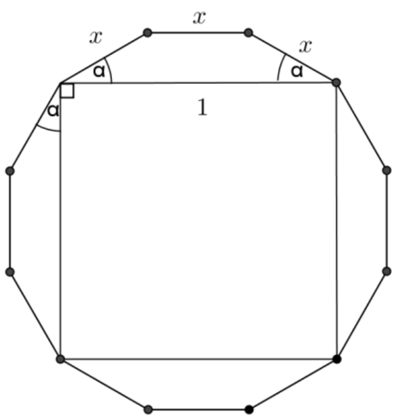
UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Čapljina, 28. ožujka 2015.

I. RAZRED

Zadatak 3. **Nad stranicama kvadrata duljine 1, prema van su konstruirani jednakokračni trapezi, tako da su vrhovi svih trapeza ujedno vrhovi pravilnog dvanaesterokuta. Koliki je opseg tog dvanaesterokuta?**

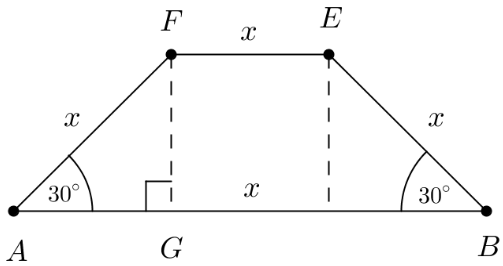
RJEŠENJE



Unutarnji kut pravilnog dvanaesterokuta je 150°, te vrijedi (slika):

$2\alpha + 90^\circ = 150^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha = 30^\circ$.

Pogledajmo sada „izdvojeni" jednakokračni trapez.



$|AF| = |FE| = |EB| = x, \qquad |AB| = 1,$

$2|AG| + x = 1 \quad \Rightarrow \quad |AG| = \dfrac{1-x}{2}.$

ΔAGF **je „pola" jednakostraničnog trokuta stranice duljine** x**, pa visina** $|AG| = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

$$\frac{1-x}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Prema tome, opseg dvanaesterokuta je $O = 12x = 6\left(\sqrt{3}-1\right)$.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Čapljina, 28. ožujka 2015.

I. RAZRED

Zadatak 4. **Odredi sve troznamenkaste brojeve $\overline{xyz}$ (x, y, z su dekadske znamenke) koji su jednaki izrazu**

$$x + y + z + xy + yz + zx + xyz\,.$$

RJEŠENJE

Treba odrediti znamenke x, y, z tako da vrijedi

$$\overline{xyz} = x + y + z + xy + yz + zx + xyz\,.$$

$$100x + 10y + z = x + y + z + xy + yz + zx + xyz$$

$$99x + 9y - xy = yz + zx + xyz$$

$$z = \frac{99x + 9y - xy}{y + x + xy}$$

Kako je z znamenka mora biti $z \le 9$, odnosno

$$99x + 9y - xy \le 9x + 9y + 9xy \quad \Rightarrow \quad 90x \le 10xy \quad \Rightarrow \quad y \ge 9\,.$$

Naravno i y je znamenka, pa je nužno $y = 9$. Uvrštavanjem dobivamo

$$z = \frac{90x + 81}{10x + 9} = 9\,.$$

Polazna jednakost je zadovoljena za $y = z = 9$ i bilo koji x:

$$x + y + z + xy + yz + zx + xyz = x + 9 + 9 + 9x + 81 + 9x + 81x = 100x + 99 = \overline{x99}\,.$$

Traženi brojevi su 199, 299, 399, 499, 599, 699, 799, 899, 999.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Čapljina, 28. ožujka 2015.

II. RAZRED

Zadatak 1. **Odredi sva realna rješenja jednadžbe**

$$\left(\sqrt{x}-2\right)^4+\left(\sqrt{x}-3\right)^4=1.$$

RJEŠENJE

Uvedimo supstituciju $t=\sqrt{x}-2$. Tada redom imamo:

$$t^4+(t-1)^4=1$$
$$t^4-1+(t-1)^4=0$$
$$(t-1)(t+1)(t^2+1)+(t-1)^4=0$$
$$(t-1)[(t+1)(t^2+1)+(t-1)^3]=0$$
$$(t-1)(t^3+t^2+t+1+t^3-3t^2+3t-1)=0$$
$$2t(t-1)(t^2-t+2)=0$$

Jednadžba $t^2-t+2=0$ nema realnih rješenja pa su jedina realna rješenja dobivene jednadžbe $t_1=0$ i $t_2=1$.
Za $t_1=0$ iz $\sqrt{x}-2=0$ dobivamo $x_1=4$, a za $t_2=1$ iz $\sqrt{x}-2=1$ slijedi $x_2=9$.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Čapljina, 28. ožujka 2015.

II. RAZRED

Zadatak 2. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$z \cdot |z| + 2z + i = 0$$

RJEŠENJE

Neka je $z = x + yi$, $x, y \in R$. Tada jednadžba poprima oblik

$$(x + yi)\sqrt{x^2 + y^2} + 2x + 2yi + i = 0$$

odakle slijedi

$$x\left(\sqrt{x^2 + y^2} + 2\right) + i\left(y\sqrt{x^2 + y^2} + 2y + 1\right) = 0$$

Odavde dobivamo

$$x\left(\sqrt{x^2 + y^2} + 2\right) = 0 \qquad (1)$$

$$y\sqrt{x^2 + y^2} + 2y + 1 = 0 \qquad (2)$$

Kako je $\sqrt{x^2 + y^2} + 2 > 0$ iz (1) slijedi $x = 0$,
Pa iz (2) dobivamo

$$y|y| + 2y + 1 = 0$$

Odavde je $y < 0$ i $y^2 - 2y - 1 = 0$.
Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Zbog $y < 0$ zadovoljava samo $y = 1 - \sqrt{2}$.
Dakle, jedino rješenje je $z = (1 - \sqrt{2})i$.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Čapljina, 28. ožujka 2015.

II. RAZRED

Zadatak 3. Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoji prirodan broj x , takov da je

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{x+n}+\sqrt{x+n+1}}=1.$$

RJEŠENJE

Racionaliziranjem pojednostavimo dane razlomke. Za $k=0,1,2,\cdots,n$ vrijedi

$$\frac{1}{\sqrt{x+k}+\sqrt{x+k+1}}=\frac{\sqrt{x+k}-\sqrt{x+k+1}}{\left(\sqrt{x+k}+\sqrt{x+k+1}\right)\left(\sqrt{x+k}-\sqrt{x+k+1}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{x+k}-\sqrt{x+k+1}}{(x+k)-(x+k+1)}=$$

$$=\sqrt{x+k+1}-\sqrt{x+k}$$

Tako dobivamo novu jednakost

$$\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)+\cdots+\left(\sqrt{x+n+1}-\sqrt{x+n}\right)=1$$

tj.

$$\sqrt{x+n+1}-\sqrt{x}=1$$

odnosno

$$\sqrt{x+n+1}=\sqrt{x}+1$$

Nakon kvadriranja dobivamo $x+n+1=x+1+2\sqrt{x}$

odakle je $n=2\sqrt{x}$

odnosno $x=\frac{n^2}{4}$

Broj x je prirodan broj ako i samo ako je n paran, tj. $n=2k,\ k\in N$.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

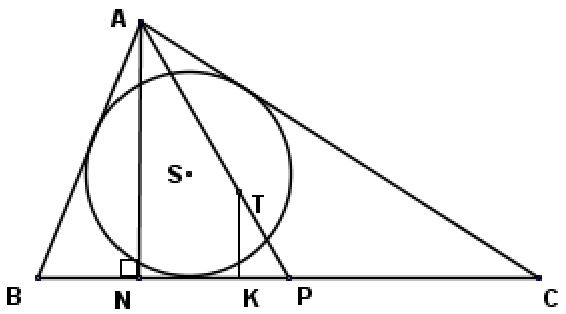
NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Čapljina, 28. ožujka 2015.

II. RAZRED

Zadatak 4. **Ako je zbroj duljina dviju stranica raznostraničnog trokuta jednak dvostrukoj duljini treće stranice, dokaži da je pravac kroz središte upisane kružnice i težište trokuta paralelan sa stranicom koja je srednja po duljini.**

RJEŠENJE

Neka su a, b, c duljine stranica trokuta, i neka je a srednja po duljini. Tada vrijedi
$2a = b + c$
Opseg trokuta je $3a$.
Neka je T težište trokuta, N nožište visine na stranicu duljine a, a K nožište okomice iz točke T na stranicu duljine a. Označimo s v duljinu visine na tu stranicu, s r polumjer upisane kružnice trokuta, a s P njegovu površinu.



Tada, zbog sličnosti trokuta $\Delta TKP \sim \Delta ANP$, vrijedi $|TK| = \frac{1}{3}v$.
Kako je $P = \frac{1}{2}av = rs$, gdje smo sa s označili poluopseg trokuta,

slijedi $$v = \frac{2P}{a} = \frac{2rs}{a} = \frac{2r\frac{3a}{2}}{a} = 3r.$$

Stoga je $|TK| = r$, što upravo znači da središte upisane kružnice i težište trokuta leže na pravcu koji je paralelan sa stranicom duljine a.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Čapljina, 28. ožujka 2015.

.

III. RAZRED

Zadatak 1 **Riješite nejednadžbu:**

$$\log 2^2 + \log 3^{1+\frac{1}{2x}} - \log\left(3^{\frac{1}{x}} + 3^3\right) > 0.$$

RJEŠENJE:

Danu nejednakost zapisujemo u ekvivalentnom obliku

$$\log \frac{2^2 \cdot 3^{1+\frac{1}{2x}}}{3^{\frac{1}{x}} + 3^3} > \log 1$$

dalje slijedi

$$\frac{2^2 \cdot 3^{1+\frac{1}{2x}}}{3^{\frac{1}{x}} + 3^3} > 1,$$

$$3^{\frac{1}{x}} - 12 \cdot 3^{\frac{1}{2x}} + 27 < 0,$$

Supstitucijom $3^{\frac{1}{2x}} = t > 0$**, dobivamo nejednadžbu**

$t^2 - 12t + 27 < 0$ **tj.** $(t-3)(t-9) < 0,$

čije rješenje je $t \in (3, 9)$

Rješenje dane nejednadžbe je $x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$**.**

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Čapljina, 28. ožujka 2015.

III. RAZRED

Zadatak 2 Nađite najmanji pozitivan cijeli broj a takov da jednadžba

$$\cos^2\pi(a-x) - 2\cos\pi(a-x) + \cos\frac{3\pi x}{2a}\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2a}+\frac{\pi}{3}\right) + 2 = 0$$

ima realna rješenja.

RJEŠENJE:

Jednadžbu zapišimo u ekvivalentnom obliku

$$[\cos\pi(a-x) - 1]^2 + \cos\frac{3\pi x}{2a}\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2a}+\frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0,$$

Kako je
$\cos\frac{3\pi x}{2a}\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2a}+\frac{\pi}{3}\right) + 1 \geq 0$ za svaki realni x, dobivamo

$\cos\pi(a-x) = 1$ i $\cos\frac{3\pi x}{2a}\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2a}+\frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$

Rješenja prve jednadžbe su $x = a + 2n$, $n \in Z$,
a druge, $x = 4a\left(\frac{1}{3}+k\right)$ ili $x = 2a\left(-\frac{1}{3}+2k\right)$, $k \in Z$.

Prema tome $a = \frac{6n}{1+12k}$ ili $a = \frac{6n}{12k-5}$.

Kako su $1+12k$ i $12k-5$ relativno prosti sa 6 , a a mora biti cijeli broj, slijedi $a \geq 6$. Za $n = 1+12k$ ili $n = 12k-5$, dobiva se $a = 6$.

Najmanji pozitivan cijeli broj s danim svojstvom je $a = 6$.

q.e.d.

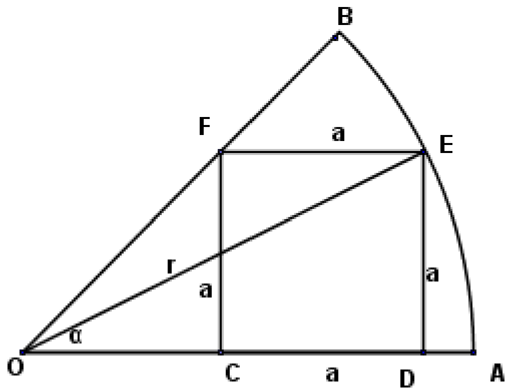
UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Čapljina, 28. ožujka 2015.

III. RAZRED

Zadatak 3. **Kvadrat je upisan u kružni isječak OAB sa središnjim kutom $\alpha < \frac{\pi}{2}$, tako da su mu dva vrha na polumjeru $\overline{OA}$, treći na luku AB i četvrti na polumjeru $\overline{OB}$. Nađite omjer površina kružnog isječka i kvadrata.**

RJEŠENJE:



Iz trokuta ΔOCF je $|OC| = a ctg\alpha$.

U trokutu ΔODE je $|OE| = r$,

$$(|OC| + |CD|)^2 + |DE|^2 = r^2$$

$$(a ctg\alpha + a)^2 + a^2 = r^2$$

$$1 + (1 + ctg\alpha)^2 = \left(\frac{r}{a}\right)^2$$

Ako je α zadan u radijanima, površina kružnog isječka je $P_1 = \frac{r^2\alpha}{2}$,
a kvadrata $P_2 = a^2$, a njihov omjer je

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{r}{a}\right)^2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} \cdot [1 + (1 + ctg\alpha)^2]$$

Napomena: Ako je kut α zadan u stupnjevima, onda je $P_1 = \frac{\alpha}{360} \cdot r^2\pi$. Tada je

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\alpha}{360} \cdot [1 + (1 + ctg\alpha)^2]\pi$$

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Čapljina, 28. ožujka 2015..

III. RAZRED

Zadatak 4 **Duljine stranica trokuta su tri uzastopna prirodna broja, a jedan od kutova trokuta je dvaput veći od jednog od preostalih dvaju kutova. Odredi duljine stranica trokuta.**

RJEŠENJE:
Nećemo izgubiti na općosti ako stavimo $a = n - 1,\ b = n,\ c = n + 1$.
Tada je $\alpha < \beta < \gamma$. Moguća su tri slučaja
1^0 $\beta = 2\alpha$
Koristeći poučak o sinusima i kosinusov poučak dobivamo:

$$cos\alpha = \frac{sin2\alpha}{2sin\alpha} = \frac{sin\beta}{2sin\alpha} = \frac{b}{2a} = \frac{n}{2(n-1)}$$

$$cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{n+4}{2(n+1)}$$

Iz jednadžbe $\frac{n}{2(n-1)} = \frac{n+4}{2(n+1)}$ dobivamo $n = 2$. Stranice trokuta bi bile $1, 2$ i 3, što nije moguće.

2^0 $\gamma = 2\alpha$. Slično kao u prethodnom slučaju dobili bismo:

$$cos\alpha = \frac{sin2\alpha}{2sin\alpha} = \frac{sin\gamma}{2sin\alpha} = \frac{c}{2a} = \frac{n+1}{2(n-1)}$$

$$cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{n+4}{2(n+1)}$$

Iz jednadžbe $\frac{n+1}{2(n-1)} = \frac{n+4}{2(n+1)}$ se dobiva $n = 5$ i duljine stranica trokuta su 4 , 5 i 6.

2^0 $\gamma = 2\beta$. Ponavljanjem postupka iz prethodnih slučajeva dobivamo:

$$cos\beta = \frac{sin2\beta}{2sin\beta} = \frac{sin\gamma}{2sin\beta} = \frac{n+1}{2n}$$

$$cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b}{2ac} = \frac{n^2+2}{2(n^2-1)}$$

Iz jednadžbe $\frac{n+1}{2n} = \frac{n^2+2}{2(n^2-1)}$ dobivamo kvadratnu jednadžbu $n^2 - 3n - 1 = 0$, čija rješenja $n_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$ su iracionalna.
Dakle, jedino rješenje je trokut sa stranicama $4, 5$ i 6.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Čapljina, 28. ožujka 2015.

IV. RAZRED

Zadatak 1. **Pronađi sve prirodne brojeve n, takove da neka tri uzastopna koeficijenta razvoja $(a+b)^n$ čine aritmetički niz.**

RJEŠENJE:

Tri uzastopna koeficijenta razvoja $(a+b)^n$ su $\binom{n}{k-1}, \binom{n}{k}, \binom{n}{k+1}$.

Oni čine aritmetički niz ako je: $2\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k+1}$. $\quad (1)$

tj. $2 \cdot \frac{n(n-1)\cdot \cdots \cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot k} = \frac{n(n-1)\cdot \cdots \cdot(n-k+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot(k-1)} + \frac{n(n-1)\cdot \cdots \cdot(n-k)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot(k+1)}$.

Nakon sređivanja dobivamo kvadratnu jednadžbu po n:

$$2 \cdot \frac{n-k+1}{k} = 1 + \frac{(n-k+1)(n-k)}{k(k+1)},$$

$$n^2 - (4k+1)n + 4k^2 - 2 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su

$$n_{1,2} = \frac{4k+1 \pm \sqrt{8k+9}}{2} \qquad (2)$$

Da bi rješenja n_1 i n_2 bila prirodni brojevi, nužno je da izraz pod korijenom bude kvadrat neparnog prirodnog broja.
Stavimo li stoga $8k+9=(2m+1)^2$, dobivamo da je $2k = m^2+m-2$, a zatim iz(2) za rješenja n_1 i n_2 imamo:

$$n_1 = m^2 + 2m - 1 = (m+1)^2 - 2,$$

$$n_2 = m^2 - 2.$$

Na temelju tih prikaza zaključujemo da su svi traženi prirodni brojevi n, koji zbog (1) moraju još zadovoljavati uvjet $n \geq k+1$, oblika

$$n = m^2 - 2, \quad m = 3, 4, 5, \cdots$$

(Jasno je da zbog simetrije binomnih koeficijenata za svaki takov n postoje u odgovarajućem razvoju dva mjesta gdje se ostvaruje polazni zahtjev o aritmetičkom nizu.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Čapljina, 28. ožujka 2015.
.

IV. RAZRED

Zadatak 2. **Nađite najmanji pozitivan cijeli broj a takov da jednadžba**

$$\cos^2\pi(a-x) - 2\cos\pi(a-x) + \cos\frac{3\pi x}{2a}\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2a}+\frac{\pi}{3}\right) + 2 = 0$$

ima realna rješenja.

RJEŠENJE:

Jednadžbu zapišimo u ekvivalentnom obliku

$$[\cos\pi(a-x) - 1]^2 + \cos\frac{3\pi x}{2a}\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2a}+\frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0,$$

Kako je
$\cos\frac{3\pi x}{2a}\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2a}+\frac{\pi}{3}\right) + 1 \geq 0$ **za svaki realni x, dobivamo**

$\cos\pi(a-x) = 1$ **i** $\cos\frac{3\pi x}{2a}\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2a}+\frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$

Rješenja prve jednadžbe su $x = a + 2n$, $n \in Z$,
a druge, $x = 4a\left(\frac{1}{3}+k\right)$ ili $x = 2a\left(-\frac{1}{3}+2k\right)$, $k \in Z$.

Prema tome $a = \frac{6n}{1+12k}$ ili $a = \frac{6n}{12k-5}$.

Kako su $1 + 12k$ i $12k - 5$ relativno prosti sa 6 , a a mora biti cijeli broj,
slijedi $a \geq 6$. Za $n = 1 + 12k$ ili $n = 12k - 5$, dobiva se $a = 6$.

Najmanji pozitivan cijeli broj s danim svojstvom je $a = 6$.

q.e.d.

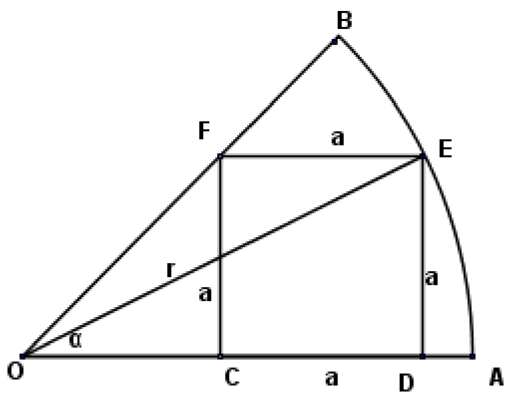
UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Čapljina, 28. ožujka 2015.

IV. RAZRED

Zadatak 3. **Kvadrat je upisan u kružni isječak OAB sa središnjim kutom $\alpha < \frac{\pi}{2}$, tako da su mu dva vrha na polumjeru $\overline{OA}$, treći na luku AB i četvrti na polumjeru $\overline{OB}$. Nađite omjer površina kružnog isječka i kvadrata.**

RJEŠENJE:



Iz trokuta ΔOCF je $|OC| = a ctg\alpha$.

U trokutu ΔODE je $|OE| = r$,

$$(|OC| + |CD|)^2 + |DE|^2 = r^2$$

$$(a ctg\alpha + a)^2 + a^2 = r^2$$

$$1 + (1 + ctg\alpha)^2 = \left(\frac{r}{a}\right)^2$$

**Ako je α zadan u radijanima, površina kružnog isječka je $P_1 = \frac{r^2\alpha}{2}$,
a kvadrata $P_2 = a^2$, a njihov omjer je**

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{r}{a}\right)^2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} \cdot [1 + (1 + ctg\alpha)^2]$$

Napomena: Ako je kut α zadan u stupnjevima, onda je $P_1 = \frac{\alpha}{360} \cdot r^2\pi$. Tada je

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\alpha}{360} \cdot [1 + (1 + ctg\alpha)^2]\pi$$

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

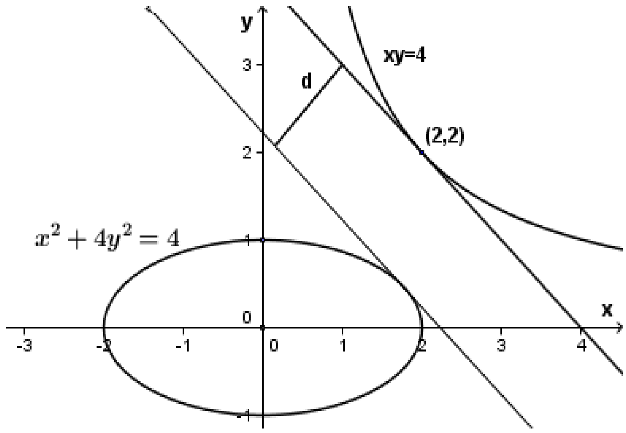
NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Čapljina, 28. ožujka 2015.

IV. RAZRED

Zadatak 4. Neka je A točka na hiperboli $xy = 4$, a B točka na elipsi $x^2 + 4y^2 = 4$.

Dokaži da vrijedi $|AB| > \frac{4-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

RJEŠENJE:



Krivulje su centralno simetrične pa je dovoljno promatrati situaciju u I. kvadrantu. Tangenta na hiperbolu $xy = 4$ u točki $(2, 2)$ ima jednadžbu $y = 4 - x$, jer zbog simetričnosti parabole u odnosu na pravac $y = x$, hiperbola ima nagib – 1. Odsječak pravca na ordinati je 4, jer točka $(2, 2)$ leži na tangenti.
Sada povlačimo tangentu na elipsu paralelnu toj tangenti. Ona će imati jednadžbu $y = -x + l$.
Iz uvjeta dodira pravca i elipse slijedi

$$a^2k^2 + b^2 = l^2, \qquad 4 + 1 = l^2$$

Pa je $l = \sqrt{5}$. Jednadžba tangente na elipsu glasi $y = -x + \sqrt{5}$.
Sada ćemo izračunati udaljenost ovih dvaju pravaca. Ona je jednaka udaljenosti točke $(2, 2)$ od tangente na elipsu:

$$d = \left|\frac{2 + 2 - \sqrt{5}}{\sqrt{1^2 + 1^2}}\right| = \frac{4 - \sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

Udaljenost između točaka A i B sigurno je veća od ove udaljenosti, jer točka u kojoj tangenta na elipsu dira elipsu ne leži na pravcu $y = x$.

q.e.d.