

ZADACI

I. RAZRED

1. Dan je sustav jednađbi :
$$\begin{cases} mx + (m+2)y = 1 \\ x + my = m \end{cases}$$
, pri čemu je m realni parametar.

- a) riješi (uz diskusiju) dani sustav jednađbi
b) za koje $m \in R$ vrijedi $x \geq y$.

2. Učenik je trebao pomnožiti 78 dvoznamenkastim brojem kojemu je znamenka desetica tri puta veća od znamenke jedinica. On je greškom zamijenio znamenke u drugom faktoru i tako dobio umnožak manji od traženog umnoška za 2808. Odredi točan umnožak.

3. Za koje vrijednosti realnog parametra a jednađba $|3 - 2|x|| = -\frac{3a}{4}$ ima točno tri rješenja?

4. Na stranici \overline{AB} kvadrata $ABCD$ dana je točka E takva da je $|AE| = 3|EB|$, a na stranici \overline{AD} dana je točka F takva da je $|AF| = 5|FD|$. S K je označen presjek pravaca DE i CF , s L presjek pravaca DE i BF , te s M presjek pravaca BF i CE . Dokaži da je zbroj površina trokuta EML i CDK jednak zbroju površina trokuta FLK i BCM .

II. RAZRED

1. Dana je kvadratna jednađba $(2mx - 1)^2 = m(m - 2x)$, $m \in R, m \neq 0$.

- a) za koje vrijednosti od m ova jednađba ima realna rješenja.
b) Za koje je m zbroj kvadrata rješenja jednađbe negativan broj.

2. Koliko rješenja ima jednađba $\left| \log_{\frac{1}{2}}(1-x)^2 \right| = |2 - |x||$.

3. Riješi jednađbu $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 4$.

4. Zadane su kružnice $k_1(A; r_1), k_2(B; r_2)$, pri čemu je $r_1 < 2r_2$ i $A \in k_2$. Na kružnici k_1 uzmemo točku T , takvu da tangenta s diralištem u T na k_1 siječe k_2 u dvije točke, K i L . Dokažite da je umnožak $|AK| \cdot |AL|$ konstantan.

III. RAZRED

1. Odredi sva rješenja nejednadžbe $\log_2 5 \cdot \log_5 \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right) > 1$.
2. Odredi sva realna rješenja jednadžbe $x^2 + 4x \cos(xy) + 4 = 0$.
3. Bočni brid pravilne trostrane piramide je $b = 1$, a njezin obujam je $V = \frac{1}{6}$. Koliki je kut pri vrhu bočne strane?
4. Koliko rješenja ima jednadžba $2 \sin \left| \frac{\pi x}{2} \right| = \left| \log_{\frac{1}{2}} |x| \right|$?

IV. RAZRED

- III. Kvocijent geometrijskog niza jednak je $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Dokaži kako je svaki član toga niza, počevši s drugim, jednak razlici onoga što mu slijedi i onoga što mu prethodi.
- IV. Dokaži da za svaki prirodni broj $n, n > 1$, broj $2^{2^n} + 1$ završava znamenkom 7.
- V. Odredite najveću i najmanju vrijednost funkcije $f(x) = a \cos x + b \sin x$,
 $a^2 + b^2 \neq 0$.
- VI. Ako je $z + z^{-1} = 2 \cos \alpha$, dokazati da je $z^n + z^{-n} = 2 \cos n\alpha$.

RJEŠENJA

I. RAZRED:

Zadatak 1.

$$a) \quad D = \begin{vmatrix} m & m+2 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - m - 2 = (m-2)(m+1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & m+2 \\ m & m \end{vmatrix} = m - m^2 - 2m = -m(m+1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$$

$1^0 \quad D \neq 0 \Rightarrow (m \neq 2 \wedge m \neq -1)$ **jednadžba ima jedinstveno rješenje:**

$$1^0 \quad x = \frac{D_x}{D} \Rightarrow x = -\frac{m}{m-2} \quad y = \frac{D_y}{D} \Rightarrow y = \frac{m-1}{m-2}$$

$2^0 \quad m = -1 \Rightarrow D = D_x = D_y = 0$ **sustav je neodređen. Jedna nepoznanica je 2^0 proizvoljna, a druga je određena bilo kojom jednadžbom sustava tj. $(x, x-1)$.**

$3^0 \quad m = 2 \Rightarrow (D = 0, D_x = -6 \neq 0, D_y = 3 \neq 0)$, **dakle sustav nema rješenja.**

$$b) \quad x \geq y \Rightarrow -\frac{m}{m-2} \geq \frac{m-1}{m-2} \Leftrightarrow \frac{2m-1}{m-2} \leq 0 \Rightarrow m \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right).$$

Zadatak 2.

Neka je $\overline{ab} = x$ traženi dvoznamenkasti broj, a $\overline{ba} = y$ broj sa zamijenjenim znamenkama. Tad je:

$$78x - 78y = 2808$$

$$78(x - y) = 2808$$

$$x - y = 36$$

Kako je $\overline{ab} = 10a + b$ i $\overline{ba} = 10b + a$, iz jednadžbe $x - y = 36$ dobivamo:

$$10a + b - (10b + a) = 36$$

$$10a + b - 10b - a = 36$$

$$9(a - b) = 36$$

$$a - b = 4$$

Kako je $a = 3b$, to je $3b - b = 4$, pa je $b = 2$ i $a = 6$. Traženi je dvoznamenkasti broj 62, a točan umnožak $78 \cdot 62 = 4836$.

Zadatak 3.

Najprije ćemo skicirati graf funkcije $f(x) = |3 - 2|x||$.

a) Za $x \geq 0$ je $f(x) = |3 - 2x|$

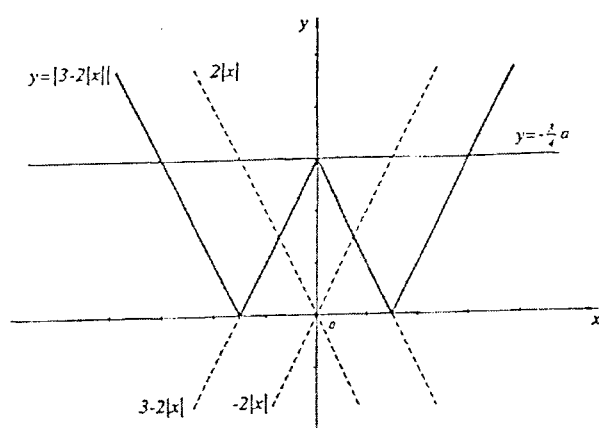
1^o Za $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$ je $f(x) = 3 - 2x$

2^o Za $x \geq \frac{3}{2}$ je $f(x) = -3 + 2x$

b) Za $x \leq 0$ je $f(x) = |3 + 2x|$

1^o Za $-\frac{3}{2} \leq x \leq 0$ je $f(x) = 3 + 2x$

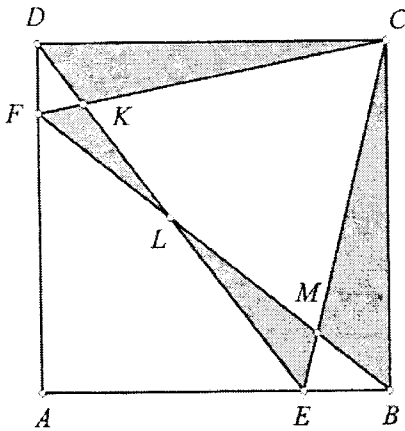
2^o Za $x \leq -\frac{3}{2}$ je $f(x) = -3 - 2x$



Sada treba naći parametar a takav da graf funkcije $f(x)$ siječe pravac $y = -\frac{3}{4}a$ u tri točke.

To je moguće samo ako je $-\frac{3}{4}a = 3 \Rightarrow a = -4$

Zadatak 4.



Sa slike vidimo da su površine trokuta BCF i CDE jednake $\frac{|AB|^2}{2}$, jer imaju jednake osnovke i visine (jednake duljini stranica trokuta). Četverokut $CKLM$ je zajednički za oba trokuta. Zato je zbroj površina trokuta EML i CDK jednak zbroju površina trokuta FLK i BCM .

II. RAZRED

Zadatak 1.

Jednadžba je oblika $4m^2x^2 - 2mx + 1 - m^2 = 0$.

$$D \geq 0$$

a) $4m^2 - 16m^2(1 - m^2) \geq 0$

$$4m^2(4m^2 - 3) \geq 0, \text{ kako je } m^2 \geq 0 \text{ za } \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow 4m^2 - 3 \geq 0$$

$$(2m - \sqrt{3}) \cdot (2m + \sqrt{3}) \geq 0$$

$$m \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty \right).$$

b) $x_1^2 + x_2^2 < 0$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 < 0$$

$$\left(\frac{2m}{4m^2} \right)^2 - 2 \cdot \frac{1 - m^2}{4m^2} < 0$$

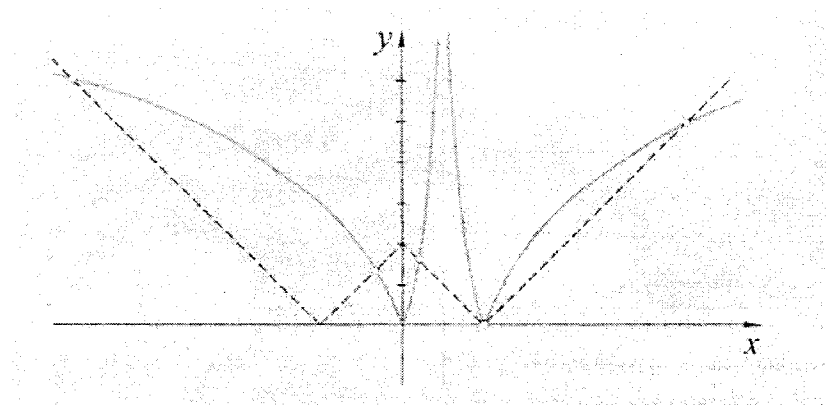
$$2m^2 - 1 < 0 \Rightarrow (\sqrt{2}m - 1)(\sqrt{2}m + 1) < 0 \Rightarrow m \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), m \neq 0$$

Zadatak 2.

Uzmimo $f(x) = \left| \log_{\frac{1}{2}}(1-x)^2 \right|$ tj. $f(x) = \left| 2 \log_{\frac{1}{2}}|1-x| \right|$ te $g(x) = |2 - |x||$

Rješenje zadatka je $x \in \mathbb{R}$ za koje je $f(x) = g(x)$.

Kako se traži broj rješenja jednadžbe, zadatak ćemo rješavati grafički.



Jednadžba ima ukupno pet rješenja.

Zadatak 3.

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

Tada jednadžba glasi $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + \left(\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^x = 4$

Zamijenimo li $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = t$, imat ćemo jednadžbu

$$t + \frac{1}{t} = 4 \Rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

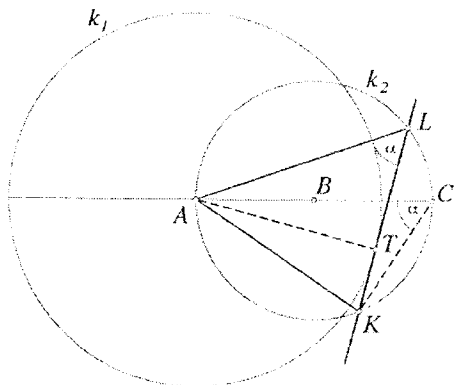
$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow x = 2$$

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{x}{2} = -1 \Rightarrow x = -2$$

Rez: $x = 2, x = -2$

Zadatak 4.

Uz oznake kao na slici vrijedi $\sphericalangle ACK = \sphericalangle ALK = \alpha$. Dalje je $\sphericalangle ATL = 90^\circ$ i $\sphericalangle AKC = 90^\circ$. Zbog svega toga trokuti AKC i ATL su slični te vrijedi: $|AT|:|AK| = |AL|:|AC|$ odnosno $|AK| \cdot |AL| = |AT| \cdot |AC|$. Budući da je $|AT| = r_1$, $|AC| = 2r_2$ to posljednja jednakost prelazi u $|AK| \cdot |AL| = 2r_1 r_2 = \text{const.}$



III. RAZRED

Zadatak 1.

Izraz pod logaritmom je pozitivan jer ne mogu oba korijena istovremeno biti jednaka nuli, a da bi sve bilo definirano treba biti $\frac{1-x}{1+x} \geq 0$ i $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$, odakle dobivamo $x \in (-1, 1)$.

Primijetimo da je $\log_2 5 = \frac{1}{\log_5 2}$, pa nejednadžba prelazi u

$$\log_5 \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right) > \log_5 2, \text{ odakle dobivamo } \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} > 2,$$

odnosno nakon svodenja na zajednički nazivnik,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 1, \text{ tj. } \sqrt{1-x^2} < 1.$$

Ovo je ispunjeno za $x \in (-1, 1)$ i $x \neq 0$.

Rješenje nejednadžbe su $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.

Zadatak 2.

Rješavajući jednadžbu po nepoznanici x imamo:

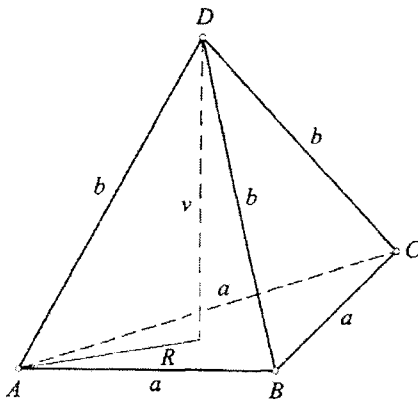
$$x_{1,2} = -2\cos(xy) \pm \sqrt{4\cos^2(xy) - 4}$$

$$x_{1,2} = -2\cos(xy) \pm \sqrt{-4\sin^2(xy)}$$

Kad tražimo realna rješenja, onda mora biti $\sin(xy) = 0$. Slijedi $xy = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dakle, $x = -2\cos(k\pi)$. Ako je $k = 2n$ ($n \in \mathbb{Z}$), tada je $\cos(k\pi) = 1$ i $x = -2$ te zatim $y = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ako je $k = 2m+1$, ($m \in \mathbb{Z}$), tada je $\cos k\pi = -1$ te $x = 2$, a $y = \frac{(2m+1)\pi}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Zadatak 3.



Baza piramide je jednakostranični trokut stranice duljine a . Polumjer njemu

opisane kružnice je $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Visina piramide je $v = \sqrt{b^2 - R^2} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{3}}$.

Obujam te piramide je $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{v}{3} = \frac{1}{6}$.

Odavde dobivamo jednadžbu $a^6 - 3a^4 + 4 = 0$

$$a^6 - 3a^4 + 4 = a^6 - 2a^4 - a^4 - 2a^2 + 2a^2 + 4 = (a^2 - 2)(a^4 - a^2 - 2) = 0$$

$$a^2 - 2 = 0 \quad \text{ili} \quad a^4 - a^2 - 2 = 0$$

$$a^2 - 2 \quad a^2 = 2 \quad \text{ili} \quad a^2 = -1 \quad \text{ili} \quad a^2 = 2.$$

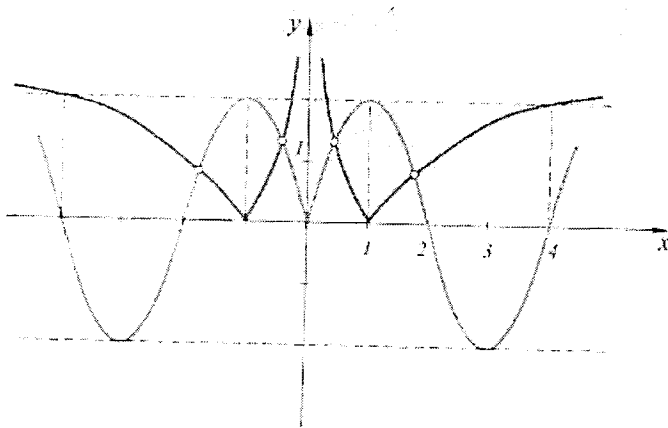
$$a^2 = 2 \quad a^2 = -1 \quad \text{nije moguće. Dakle, jedina mogućnost je } a^2 = 2.$$

Kut pri vrhu pobočke izračunat ćemo pomoću kosinusovog poučka:

$$\cos \varphi = \frac{b^2 + b^2 - a^2}{2b \cdot b} = 1 - \frac{a^2}{2b^2} = 0, \quad \text{ili sinusovog poučka: } \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dakle, traženi kut je $\varphi = 90^\circ$.

Zadatak 4.



Uzmimo $f(x) = 2 \sin \left| \frac{\pi x}{2} \right|$ te $g(x) = \left| \log_{\frac{1}{2}} |x| \right|$

Rješenje zadatka je $x \in \mathbb{R}$ za koje je $f(x) = g(x)$.

Kako se traži broj rješenja jednadžbe, zadatak ćemo rješavati grafički.

Jednadžba ima ukupno četiri rješenja.

IV. RAZRED

Zadatak 1.

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_{k-1} &= a_1 q^k - a_1 q^{k-2} = a_1 q^{k-1} \left(q - \frac{1}{q} \right) = a_1 q^{k-1} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{2}{\sqrt{5}+1} \right) = \\ &= a_1 q^{k-1} \cdot \frac{2(\sqrt{5}+1)}{2(\sqrt{5}+1)} = a_1 q^{k-1} = a_k \end{aligned}$$

Zadatak 2.

1° za $n=2 \Rightarrow 2^{2^2} + 1 = 17$

2° Pretpostavimo da $2^{2^k} + 1$, za neki prirodni broj k završava znamenkom 7

3° Dokažimo i da $2^{2^{k+1}} + 1$ završava znamenkom 7.

Po pretpostavci $2^{2^k} + 1$ je oblika $10a + 7$, odnosno $2^{2^k} = 10a + 6$, $a \in \mathbb{N}$.

$2^{2^{k+1}} + 1 = 2^{2^k \cdot 2} + 1 = (2^{2^k})^2 + 1 = (10a + 6)^2 + 1 = 100a^2 + 120a + 37$, što je očito broj čija je posljednja znamenka 7.

Zadatak 3.

$$\text{Iz } (a \cos x + b \sin x)^2 + (a \sin x - b \cos x)^2 = a^2 + b^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (a \sin x - b \cos x)^2 = a^2 + b^2 - (a \cos x + b \sin x)^2$$

Kako je za sve $x \in \mathbb{R}$ lijeva strana nenegativna, takva mora biti desna, tj.

$$a^2 + b^2 \geq (a \cos x + b \sin x)^2 \Rightarrow -\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \cos x + b \sin x \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Zadatak 4.

$$z + z^{-1} = 2 \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad z^2 + 1 = 2z \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad z^2 - 2z \cos \alpha + 1 = 0$$

Rješenje ove kvadratne jednadžbe je: $z_{1,2} = \frac{2 \cos \alpha \pm \sqrt{4 \cos^2 \alpha - 4}}{2} =$

$$\cos \alpha \pm i \sin \alpha.$$

Sada imamo: $z^n + z^{-n} = (\cos \alpha \pm i \sin \alpha)^n + (\cos \alpha \pm i \sin \alpha)^{-n}$
 $= \cos n\alpha \pm i \sin n\alpha + \cos(-n\alpha) \pm i \sin(-n\alpha)$
 $= \cos n\alpha \pm i \sin n\alpha + \cos n\alpha \mp i \sin n\alpha = 2 \cos n\alpha.$

ZADATKE PRIPREMILI

Za I., II. i III. razred NIKO SUŠAC, prof.

Za IV. razred IVANA MILINKOVIĆ ROSIĆ, prof.

NATJECATELJSKA KOMISIJA- SŠ

1. NIKO SUŠAC, prof.
2. NIKOLA RAGUŽ, prof.
3. IVANA MILINKOVIĆ ROSIĆ, prof.

**REZULTATI NATJECANJA IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH
ŠKOLA FEDERACIJE BIH**

I RAZRED

Osvojeno mjesto	Ime i prezime	Škola i mjesto
I. mjesto	Kristina Krželj	Gimnazija Livno
II. mjesto	Ema Golemac	Gimnazija Livno
III. mjesto	Katarina Čavar	Gimnazija fra Dominika Mandića Široki Brijeg

II. RAZRED

Osvojeno mjesto	Ime i prezime	Škola i mjesto
I. mjesto	Valerija Šimić	Gimnazija fra Grge Martića Mostar
II. mjesto	Adi Bulić	Gimnazija Livno
III. mjesto	Josip Tica	Srednja škola Antuna Branka Šimića Grude

III. RAZRED

Osvojeno mjesto	Ime i prezime	Škola i mjesto
I. mjesto	Jakov Konta	Gimnazija Livno
II. mjesto	Sara Šakota	Gimnazija fra Dominika Mandića Široki Brijeg
III. mjesto	Hrvoje Jukić	KŠC " don Bočko " Žepče

IV. RAZRED

Osvojeno mjesto	Ime i prezime	Škola i mjesto
I. mjesto	Ivan Vukojević	Gimnazija Ljubuški
II. mjesto	Marija Topić	Gimnazija fra Dominika Mandića Široki Brijeg
III. mjesto	Franjo Šarčević	Srednja škola Prozor

**UČENICI KOJI SU SE PLASIRALI NA NATJECANJE IZ
MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA NA RAZINI BIH**

- 1. Kristina Krželj - Gimnazija Livno**
- 2. Valerija Šimić – Gimnazija fra Grge Martića Mostar**
- 3. Jakov Konta - Gimnazija Livno**
- 4. Ivan Vukojević – Gimnazija Ljubuški**
- 5. Marija Topić – Gimnazija fra Dominika Mandića Široki Brijeg**
- 6. Franjo Šarčević – Srednja škola Prozor**
- 7. Ivana Krešić – Srednja škola Čapljina**
- 8. Kristina Prce – Srednja škola Čapljina**
- 9. Ana Perković – Gimnazija Livno**
- 10. Monika Mihalj – Gimnazija fra Dominika Mandića Široki Brijeg**
- 11. Sara Šakota – Gimnazija fra Dominika Mandića Široki Brijeg**
- 12. Hrvoje Jukić KŠC " don Bosco" Žepče**