NATJECANJA IZ MATEMATIKE

UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA FEDERACIJE BIH

Livno, 21. ožujka 2026.

UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA HNŽ, ZHŽ, PŽ I HBŽ

VIII. i IX. razreda održana su 27. ožujka 2026. (Neum, Rakitno, Šuica i Tolisa)

VI. i VII. razreda održano je 15. svibnja 2026. (Buna, Biograci, Šuica i Bok)

BILTEN

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA

NAKLADNIK

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA

ZA NAKLADNIKA

MARINKO ANTUNOVIĆ, prof.

NAKLADA U 1000 PRIMJERAKA

SADRŽAJ

PROGRAM NATJECANJA – SREDNJE ŠKOLE

09:30 **Sastanak profesora-pratitelja učenika**

10:00 **<u>Svečano otvaranje natjecanja</u>**

Sudionike natjecanja i goste pozdravili su:

Saša Grabovac, ravnatelj SSŠ Silvija Strahimira Kranjčevića

Tonka Marinčić, u ime gradonačelnika Livna

Ante Tadić, Ministar obrazovanja HBŽ

Marinko Antunović, predsjednik UMRB Žepče

10:30-13:30 **Natjecanje učenika – izrada zadataka**

13:30-15:15 **Rad komisija – pregled učeničkih radova**

12:00-15:00 **Ručak za sve sudionike natjecanja u Restoran - Pizzeria Metropolis 2**

15:15 **Neslužbeni rezultati natjecanja (pod šiframa)**

15:15-15:45 **Reklamacije učenika-natjecatelja Natjecateljskoj komisiji**

16:00 **Proglašenje službenih rezultata natjecanja, dodjela diploma i nagrada najuspješnijim učenicima. Zatvaranje natjecanja.**

Z A D A C I

1 . RAZRED

1. **Odredite sve cijele brojeve a i b za koje vrijede jednakosti**

$$\begin{cases} a^2 - 10b + 1 = 0 \\ b^2 + 14a + 73 = 0 \end{cases}.$$

2. **Riješite uz raspravu sustav jednadžbi**

$$\begin{cases} x + py = 3 \\ px + 4y = 6 \end{cases},$$

a zatim odredite vrijednost realnog parametra p, tako da za rješenje (x, y) sustava jednadžbi vrijedi $|x - y| > 1$.

3. **Neka su a, b, c prirodni brojevi takvi da su $a + c$ i $b + c$ kvadrati uzastopnih prirodnih brojeva. Dokažite da su tada $ab + c$ i $ab + a + b + c$ kvadrati uzastopnih prirodnih brojeva.**

4. **Zadana je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Točke M i N su polovišta bridova AB i BC. Kako se odnose obujmi, a kako oplošja kocke i piramide $MBNB_1$?**

2 . RAZRED

1. **Odredite sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi $z \cdot |z| + 2z + i = 0$.**

2. **Riješite jednadžbu**

$$x^2 + 4 \cdot \left(\frac{x}{x-2}\right)^2 = 45.$$

3. **U pravokutnom trokutu ABC vrijedi**

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{v_c} = 1,$$

gdje su $a, b \in \mathbb{N}$ duljine kateta i v_c duljina visine na hipotenuzu. Kolike su duljine stranica tog trokuta?

4. **Dva se kruga K_1 i K_2 sijeku tako da se izvan njihova presjeka nalazi 10% površine kruga K_1 i 60% površine kruga K_2. Izračunajte polumjere krugova K_1 i K_2, ako je površina presjeka jednaka 94π.**

3 . RAZRED

1. **Riješite jednadžbu**

$$\sqrt{3\cdot 2^{log2x}+1}+\sqrt{2\cdot 2^{log2x}+9}=\sqrt{13\cdot 2^{log2x}-4}.$$

2. **Dokažite da u trokutu ABC s kutovima α,β,γ, opsegom O i polumjerom opisane kružnice R vrijedi**

$$sin^2\alpha+sin^2\beta+sin^2\gamma\geq\frac{O^2}{12R^2}.$$

3. **Riješite jednadžbu** $(a,b\in\mathbb{R}^+)$

$$\frac{asinx+b}{bcosx+a}=\frac{acosx+b}{bsinx+a}.$$

4. **Odredite sve pravokutne trokute kod kojih dvostruka površina i trostruki opseg imaju istu brojnu vrijednost ($a,b,c\in\mathbb{N}$).**

4. RAZRED

1. **Odredite sve $z\in\mathbb{C}$ za koje vrijedi**

$$\left|z^2-i\right|^2+1=(2Re(z)Im(z)-1)^2+(Re(z))^2$$
$$Im(z)=Re(z^2)$$

2. **Neka su x_1 i x_2 korijeni jednadžbe $x^2-3x+A=0$ i x_3 i x_4 korijeni jednadžbe $x^2-12x+B=0$. Ako su brojevi x_1, x_2, x_3 i x_4 uzastopni članovi geometrijskog niza, odredite realne brojeve A i B.**

3. **Odredite sve pravokutne trokute kod kojih dvostruka površina i trostruki opseg imaju istu brojnu vrijednost ($a,b,c\in\mathbb{N}$).**

4. **Odredite sve funkcije $f(x)$, definirane za sve pozitivne brojeve x, koje poprimaju pozitivne vrijednosti i koje zadovoljavaju za sve pozitivne x i y jednadžbu**

$$f(x^y)=f(x)^{f(y)}.$$

R J E Š E N J A

1. RAZRED

Zadatak 1. Odredite sve cijele brojeve a i b za koje vrijede jednakosti

$$\begin{cases} a^2 - 10b + 1 = 0 \\ b^2 + 14a + 73 = 0 \end{cases}.$$

RJEŠENJE:

Zbrajanjem zadanih jednakosti dobijemo:

$$a^2 + 14a + b^2 - 10b + 74 = 0$$

$$\underbrace{a^2 + 14a + 49}_{(a+7)^2} + \underbrace{b^2 - 10b + 25}_{(b-5)^2} = 0$$

$$(a + 7)^2 + (b - 5)^2 = 0$$

Kako je $(a + 7)^2 \geq 0$ i $(b - 5)^2 \geq 0$ i kako zbroj dva pozitivna broja ne može biti 0, nužno je da je

$$a + 7 = 0 \quad \text{i} \quad b - 5 = 0,$$

pa slijedi da je

$$a = -7, \quad b = 5.$$

Zadatak 2. Riješite uz raspravu sustav jednadžbi

$$\begin{cases} x + py = 3 \\ px + 4y = 6 \end{cases},$$

a zatim odredite vrijednost realnog parametra p, tako da za rješenje (x, y) sustava jednadžbi vrijedi $|x - y| > 1$.

RJEŠENJE:

Odredimo determinante

$$D_s = \begin{vmatrix} 1 & p \\ p & 4 \end{vmatrix} = 4 - p^2, \quad D_x = \begin{vmatrix} 3 & p \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 6p \quad i \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ p & 6 \end{vmatrix} = 6 - 3p.$$

Sada je

$$\boldsymbol{x = \frac{6(p-2)}{(p-2)(p+2)} \qquad i \qquad y = \frac{3(p-2)}{(p-2)(p+2)}.}$$

Rasprava:

1) **Za $p \neq 2$ i $p \neq -2$ sustav ima jedinstveno rješenje $x = \frac{6}{p+2}$ i $y = \frac{3}{p+2}$.**
2) **Za $p = 2$ sustav je neodređen (beskonačno mnogo rješenja)**
3) **Za $p = -2$ sustav je nemoguć (nema rješenja)**

Uvjet $|x-y| > 1$ daje

$$\left|\frac{6}{p+2} - \frac{3}{p+2}\right| > 1$$

$$\left|\frac{3}{p+2}\right| > 1$$

$$\frac{3}{|p+2|} > 1$$

$$|p+2| < 3,$$

tj.

$$-3 < p+2 < 3,$$

pa je rješenje $p \in \langle -5, 1\rangle \setminus \{-2\}$.

<u>Zadatak 3.</u> Neka su a, b, c prirodni brojevi takvi da su $a+c$ i $b+c$ kvadrati uzastopnih prirodnih brojeva. Dokažite da su tada $ab+c$ i $ab+a+b+c$ kvadrati uzastopnih prirodnih brojeva.

<u>RJEŠENJE</u>:

Iz uvjeta zadatka slijedi da je

$$a+c = n^2, \qquad b+c = (n+1)^2.$$

Oduzimanjem ovih jednakosti dobijemo:

$$b-a = (b+c)-(a+c) = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1,$$

odakle slijedi da je

$$b = a+2n+1.$$

Prema tome je

$$\begin{aligned} ab+c &= a(a+2n+1)+c \\ &= a^2 + a(2n+1) + c \\ &= a^2 + 2an + (a+c) \end{aligned}$$

$$= a^2 + 2an + n^2$$
$$= (a+n)^2$$

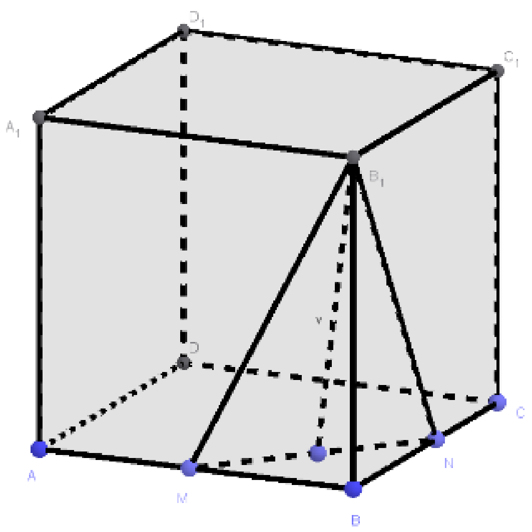
i

$$ab + a + b + c = ab + c + a + b = (a+n)^2 + 2a + 2n + 1$$
$$= a^2 + 2an + n^2 + 2a + 2n + 1$$
$$= a^2 + 2a(n+1) + (n+1)^2$$
$$= (a+n+1)^2$$

<u>Zadatak 4</u>. Zadana je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Točke M i N su polovišta bridova AB i BC. Kako se odnose obujmi, a kako oplošja kocke i piramide $MBNB_1$?

<u>RJEŠENJE</u>: Neka je brid kocke a, slijedi da je $|MB| = |BN| = \frac{a}{2}$.

Primjenom Pitagorina poučka dobijemo:



$$|MN| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$|MB_1| = |NB_1| = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$v = \sqrt{|MB_1|^2 - \left(\frac{1}{2}|MN|\right)^2}$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{5}{4}a^2 - \frac{a^2}{8}} = \sqrt{\frac{9}{8}a^2} = \frac{3a}{2\sqrt{2}}$$

Obujam kocke i piramide:

$$V_k = a^3 \qquad V_p = \frac{1}{3}P_{\Delta MBN} \cdot a = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^3}{24}$$

pa je

$$\frac{V_k}{V_p} = 24:1$$

Za oplošja vrijedi

$$O_k = 6a^2 \qquad O_p = P_{\Delta MBN} + P_{\Delta BMB_1} + P_{\Delta BNB_1} + P_{\Delta MNB_1} = a^2$$

$$\frac{O_k}{O_p} = 6:1$$

2. RAZRED

Zadatak 1. Odredite sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi $z \cdot |z| + 2z + i = 0$.

RJEŠENJE:

Neka je $z = x + iy$. Uvrštavanjem u zadanu jednadžbu imamo

$$(x+iy)\sqrt{x^2+y^2} + 2x + 2iy + i = 0$$

$$x\left(\sqrt{x^2+y^2}+2\right) + i\left(y\sqrt{x^2+y^2}+2y+1\right) = 0$$

iz čega slijedi

$$\begin{cases} x\left(\sqrt{x^2+y^2}+2\right) = 0 \\ y\sqrt{x^2+y^2}+2y+1 = 0 \end{cases}.$$

Iz prve jednadžbe imamo da je

$$\sqrt{x^2+y^2}+2 > 0$$

te je rješenje

$$x = 0.$$

Uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobijemo

$$y|y| + 2y + 1 = 0.$$

Razlikujemo dva slučaja

1) **za $y < 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 2y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$**

   ali zbog uvjeta $y < 0$ jedino rješenje je $y = 1 - \sqrt{2}$

2) **za $y > 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 + 2y + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{1,2} = -1$**

   ali zbog uvjeta $y > 0$ to nije rješenje

Znači, rješenje je $z = i(1-\sqrt{2})$.

Zadatak 2. Riješite jednadžbu

$$x^2 + 4 \cdot \left(\frac{x}{x-2}\right)^2 = 45.$$

<u>RJEŠENJE</u>:

Za $x \neq 2$ imamo

$$x^2 + 2x \cdot \frac{2x}{x-2} + \left(\frac{2x}{x-2}\right)^2 - 2x \cdot \frac{2x}{x-2} = 45,$$

odnosno

$$\left(x + \frac{2x}{x-2}\right)^2 - 4\frac{x^2}{x-2} = 45$$

$$\left(\frac{x^2}{x-2}\right)^2 - 4\frac{x^2}{x-2} - 45 = 0.$$

Supstitucijom $t = \frac{x^2}{x-2}$ dobijemo

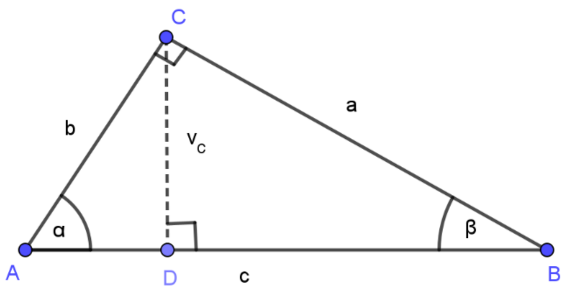
$$t^2 - 4t - 45 = 0,$$

čija su rješenja $t_1 = -5$, $t_2 = 9$, te vraćanjem supstiticije dobijemo sljedeće jednadžbe i rješenja:

1) $x^2 + 5x - 10 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{65}}{2}$
2) $x^2 - 9x + 18 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_3 = 3, \; x_4 = 6.$

<u>Zadatak 3.</u> U pravokutnom trokutu ABC vrijedi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{v_c} = 1$, gdje su $a, b \in \mathbb{N}$ duljine kateta i v_c duljina visine na hipotenuzu. Kolike su duljine stranica tog trokuta?

<u>RJEŠENJE</u>: Iz sličnosti trokuta CBD i ABC slijedi da je $\frac{v_c}{a} = \frac{b}{c} \quad \Longrightarrow \quad \frac{v_c}{a} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$



$$v_c = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Dobiveni izraz uvrstimo u zadani uvjet

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \cdot \frac{1}{b} = 1 \qquad /\cdot ab$$

$$a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = ab$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = ab - (a + b) \qquad /^2$$

$$a^2 + b^2 = (ab)^2 - 2ab(a + b) + (a + b)^2$$

$$(ab)^2 - 2ab(a + b) + 2ab = 0 \qquad /: ab$$

$$ab - 2(a + b) + 2 = 0$$

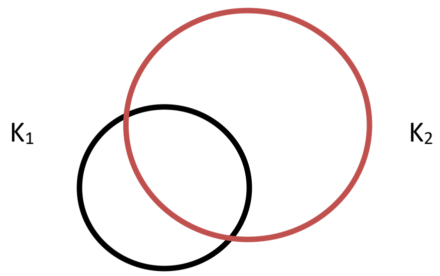
$$a = \frac{2b - 2}{b - 2} = 2 + \frac{2}{b - 2}$$

Pošto je $a \in \mathbb{N}$ slijedi da $(b - 2) \in \{-2, -1, 1, 2\}$, odnosno $b \in \{0, 1, 3, 4\}$. Kako mora biti $b \neq 0$, odnosno $b \in \{1, 3, 4\}$.

Za $b = 1$ slijedi da je $a = 0$, te ostaju samo opcije $b = 3, a = 4$ i $b = 4, a = 3$. Neka je $a = 3, b = 4$, tada je $v_c = \frac{12}{5}$.

<u>Zadatak 4</u>. Dva se kruga K_1 i K_2 sijeku tako da se izvan njihova presjeka nalazi 10% površine kruga K_1 i 60% površine kruga K_2. Izračunajte polumjere krugova K_1 i K_2, ako je površina presjeka jednaka 94π.

<u>RJEŠENJE</u>:



Ako se 10% površine kruga K_1 nalazi izvan presjeka, onda je površina presjeka 90% površine kruga K_1. Ako je 60% površine kruga K_2 van presjeka, onda je površina presjeka 40% površine kruga K_2.

Označimo sa R_1 polumjer kruga K_1, a sa R_2 polumjer kruga K_2, slijedi da je

$$\frac{90}{100} R_1^2 \pi = \frac{40}{100} R_2^2 \pi$$

$$\frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{4}{9} \quad \Rightarrow \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{2}{3}$$

Sada iskoristimo površinu presjeka, koja je jednaka

$$\frac{90}{100}P(K_1) = \frac{90}{100}R_1^2\pi = 94\pi$$

$$\frac{9}{10}R_1^2 = 94 \quad \Rightarrow \quad R_1^2 = \frac{940}{9} \quad \Rightarrow \quad R_1 = \sqrt{\frac{940}{9}} = \frac{2\sqrt{235}}{3}, \;\; R_2 = \sqrt{235}$$

<u>3. RAZRED</u>

<u>Zadatak 1.</u> Riješite jednadžbu

$$\sqrt{3 \cdot 2^{log2x} + 1} + \sqrt{2 \cdot 2^{log2x} + 9} = \sqrt{13 \cdot 2^{log2x} - 4}.$$

<u>RJEŠENJE</u>:

Jednadžba ima uvjet $13 \cdot 2^{log2x} - 4 \geq 0$. Kvadriranjem dobijemo

$$3 \cdot 2^{log2x} + 1 + 2 \cdot \sqrt{(3 \cdot 2^{log2x} + 1)(2 \cdot 2^{log2x} + 9)} + 2 \cdot 2^{log2x} + 9 = 13 \cdot 2^{log2x} - 4$$

$$2 \cdot \sqrt{6 \cdot 2^{2log2x} + 29 \cdot 2^{log2x} + 9} = 8 \cdot 2^{log2x} - 14 \qquad /:2$$

$$\sqrt{6 \cdot 2^{2log2x} + 29 \cdot 2^{log2x} + 9} = 4 \cdot 2^{log2x} - 7$$

uz dodatni uvjet $4 \cdot 2^{log2x} - 7 \geq 0$, imamo

$$6 \cdot 2^{2log2x} + 29 \cdot 2^{log2x} + 9 = 16 \cdot 2^{2log2x} - 56 \cdot 2^{log2x} + 49$$

$$2 \cdot 2^{2log2x} - 17 \cdot 2^{log2x} + 8 = 0$$

Uz smjenu $2^{log2x} = t$ dobijemo jednadžbu

$$2t^2 - 17t + 8 = 0,$$

čija su rješenja $t_1 = 8$ i $t_2 = \frac{1}{2}$.

Za $t_1 = 8$ rješenje je $x = 500$, a za $t_2 = \frac{1}{2}$ rješenje $x = \frac{1}{20}$ ne zadovoljava postavljeni uvjet.

Zadatak 2. Dokažite da u trokutu ABC s kutovima α, β, γ, opsegom O i polumjerom opisane kružnice R vrijedi

$$sin^2\alpha + sin^2\beta + sin^2\gamma \geq \frac{O^2}{12R^2}.$$

RJEŠENJE:

Koristimo nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2 = O^2.$$

Koristeći

$$\begin{cases} a = 2Rsin\alpha \\ b = 2Rsin\beta \\ c = 2Rsin\gamma \end{cases}$$

dobijemo

$$3(4R^2sin^2\alpha + 4R^2sin^2\beta + 4R^2sin^2\gamma) \geq O^2 \qquad /: 12R^2$$

odnosno

$$sin^2\alpha + sin^2\beta + sin^2\gamma \geq \frac{O^2}{12R^2}.$$

Zadatak 3. Riješite jednadžbu $(a, b \in \mathbb{R}^+)$

$$\frac{asinx+b}{bcosx+a} = \frac{acosx+b}{bsinx+a}.$$

RJEŠENJE:

Uz uvjete $bcosx + a \neq 0$, $bsinx + a \neq 0$ imamo

$$(asinx+b)(bsinx+a) = (acosx+b)(bcosx+a)$$

$$ab(sin^2x - cos^2x) + a^2(sinx - cosx) + b^2(sinx - cosx) = 0$$

$$(sinx - cosx)[a^2 + b^2 + ab(sinx + cosx)] = 0$$

1) **Ako je $sinx - cosx = 0$, rješenje je**

$$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2) **Ako je $a^2 + b^2 + ab(sinx + cosx) = 0$**

$$sinx + cosx = -\frac{a^2 + b^2}{ab}$$

Primijenimo adicijsku formulu

$$\frac{\sqrt{2}}{2} sinx + \frac{\sqrt{2}}{2} cosx = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

$$sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\sqrt{2} \cdot \frac{a^2 + b^2}{2ab} \leq -\sqrt{2} \cdot \frac{2ab}{2ab} = -\sqrt{2}$$

što ne može biti ispunjeno, jer je $sinx \in [-1, 1]$.

<u>Zadatak 4.</u> Odredite sve pravokutne trokute kod kojih dvostruka površina i trostruki opseg imaju istu brojnu vrijednost ($a, b, c \in \mathbb{N}$).

<u>RJEŠENJE</u>:

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $a \leq b < c$ i vrijedi Pitagorin poučak $a^2 + b^2 = c^2$. Prema uvjetu je

$$2 \cdot \frac{ab}{2} = 3(a + b + c),$$

iz čega dobijemo

$$a + b + c = \frac{ab}{3}$$

$$c = \frac{ab}{3} - (a + b)$$

a zatim kvadriranjem

$$c^2 = \frac{a^2b^2}{9} + \underbrace{a^2 + b^2}_{c^2} - \frac{2a^2b}{3} - \frac{2ab^2}{2} + 2ab$$

Primjenom Pitagorina poučka i množenjem s 9 dobijemo

$$a^2b^2 - 6a^2b - 6ab^2 + 18ab = 0$$

$$ab(ab - 6a - 6b + 18) = 0$$

1) $ab = 0$, odnosno $a = 0$ ili $b = 0$ što nije moguće

2) $b(a-6) = 6a - 18 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{6a-18}{a-6} = 6 + \frac{18}{a-6}$

Da bi b bio prirodni broj $a - 6$ mora biti 1,2,3,6,9,18, tj.

$$a \in \{7, 8, 9, 12, 15, 24\} \qquad b \in \{24, 15, 12, 9, 8, 7\}.$$

Zbog pretpostavke $a \leq b$ slijedi da je $a \in \{7, 8, 9\}$, $b \in \{24, 15, 12\}$, pa su rješenja $(7, 24, 25)$, $(8, 15, 17)$, $(9, 12, 15)$.

4. RAZRED

Zadatak 1. Odredite sve $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi

$$\left|z^2 - i\right|^2 + 1 = (2Re(z)Im(z) - 1)^2 + (Re(z))^2$$
$$Im(z) = Re(z^2)$$

RJEŠENJE:

Uvrstimo u uvjet $z = x + iy$, dobijemo

$$\left|x^2 + 2xyi - y^2 - i\right|^2 + 1 = (2xy - 1)^2 + x^2$$
$$y = Re(x^2 + 2xyi - y^2)$$

$$(x^2 - y^2)^2 + (2xy - 1)^2 + 1 = (2xy - 1)^2 + x^2$$
$$y = x^2 - y^2$$

$$(x^2 - y^2)^2 = x^2 - 1$$
$$y = x^2 - y^2 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = y^2 + y$$

$$y^2 = y^2 + y - 1$$
$$y = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$$

Rješenja su

$$z_1 = \sqrt{2} + i, \qquad z_2 = -\sqrt{2} + i.$$

Zadatak 2. **Neka su x_1 i x_2 korijeni jednadžbe $x^2 - 3x + A = 0$ i x_3 i x_4 korijeni jednadžbe $x^2 - 12x + B = 0$. Ako su brojevi x_1, x_2, x_3 i x_4 uzastopni članovi geometrijskog niza, odredite realne brojeve A i B.**

RJEŠENJE:

Primjenom Vièteovih pravila imamo:

$$x_1 + x_2 = 3 \qquad\qquad x_3 + x_4 = 12$$
$$x_1 \cdot x_2 = A \qquad\qquad x_3 \cdot x_4 = B$$

Neka je $x_2 = x_1 q$, $x_3 = x_1 q^2$, $x_4 = x_1 q^3 = x_2 q^2$.

Sada imamo

$$x_3 + x_4 = x_1 q^2 + x_2 q^2 = (x_1 + x_2) q^2$$

$$12 = 3 \cdot q^2$$

$$q^2 = 4$$

1) **Ako je $q = 2$, onda iz sustava slijedi da je**

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad A = 2, \quad x_3 = 4, \quad x_4 = 8, \quad B = 32.$$

2) **Ako je $q = -2$, onda iz sustava slijedi da je**

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 6, \quad A = -18, \quad x_3 = -12, \quad x_4 = 24, \quad B = -288.$$

Zadatak 3. Odredite sve pravokutne trokute kod kojih dvostruka površina i trostruki opseg imaju istu brojnu vrijednost ($a, b, c \in \mathbb{N}$).

RJEŠENJE:

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $a \leq b < c$ i vrijedi Pitagorin poučak $a^2 + b^2 = c^2$. Prema uvjetu je

$$2 \cdot \frac{ab}{2} = 3(a + b + c),$$

iz čega dobijemo

$$a+b+c=\frac{ab}{3}$$

$$c=\frac{ab}{3}-(a+b)$$

a zatim kvadriranjem

$$c^2=\frac{a^2b^2}{9}+\underbrace{a^2+b^2}_{c^2}-\frac{2a^2b}{3}-\frac{2ab^2}{2}+2ab$$

Primjenom Pitagorina poučka i množenjem s 9 dobijemo

$$a^2b^2-6a^2b-6ab^2+18ab=0$$

$$ab(ab-6a-6b+18)=0$$

1) $ab=0$**, odnosno** $a=0$ **ili** $b=0$ **što nije moguće**

2) $b(a-6)=6a-18 \quad \Rightarrow \quad b=\frac{6a-18}{a-6}=6+\frac{18}{a-6}$

   Da bi b **bio prirodni broj** $a-6$ **mora biti 1,2,3,6,9,18, tj.**

$$a\in\{7,8,9,12,15,24\} \qquad b\in\{24,15,12,9,8,7\}.$$

   Zbog pretpostavke $a\leq b$ **slijedi da je** $a\in\{7,8,9\}$, $b\in\{24,15,12\}$, **pa su rješenja** $(7,24,25)$, $(8,15,17)$, $(9,12,15)$.

Zadatak 4. **Odredite sve funkcije** $f(x)$**, definirane za sve pozitivne brojeve** x**, koje poprimaju pozitivne vrijednosti i koje zadovoljavaju za sve pozitivne** x **i** y **jednadžbu**

$$f(x^y)=f(x)^{f(y)}.$$

RJEŠENJE:

1) **Konstantna funkcija** $f(x)=1$ **je rješenje zadatka. Potražimo druga rješenja.**
2) **Postoji broj** $a>0$ **za kojeg je** $f(a)\neq 1$**. Tada iz jednakosti**

$$f(a)^{f(xy)}=f(a^{xy})=f(a^x)^{f(y)}=f(a)^{f(x)f(y)},$$

   slijedi da je

$$f(xy)=f(x)f(y), \quad \text{za sve } x,y>0 \qquad \textbf{(1)}$$

   S druge strane, iz jednakosti

$$f(a)^{f(x+y)}=f(a^{x+y})=f(a^x\cdot a^y)=f(a^x)f(a^y)=f(a)^{f(x)}f(a)^{f(y)}$$
$$=f(a)^{f(x)+f(y)},$$

slijedi

$$\boldsymbol{f(x+y)=f(x)+f(y),}\quad \textbf{za sve } \boldsymbol{x,y>0} \qquad \textbf{(2)}$$

Iz (1) imamo: $\boldsymbol{f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)^2}$**, te je** $\boldsymbol{f(1)=1}$**, a zatim iz (2) i (1) dobijemo**

$$\boldsymbol{f(n)=f(1+\cdots+1)=f(1)+\cdots+f(1)=n}$$

$$\boldsymbol{f\left(\frac{m}{n}\right)\cdot n=f\left(\frac{m}{n}\right)\cdot f(n)=f(m)=m}$$

odakle je za sve $\boldsymbol{m,n\in\mathbb{N}}$**,** $\quad \boldsymbol{f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}}$**.** **(3)**

Pretpostavimo da za neki $\boldsymbol{x>0}$ **vrijedi** $\boldsymbol{f(x)\neq x}$**. Neka je** $\boldsymbol{f(x)<x}$ **(drugu mogućnost promatramo na isti način). Izaberimo broj** $\boldsymbol{y=\frac{m}{n}}$ **tako da vrijedi** $\boldsymbol{f(x)<y<x}$**. Iz (2) i (3) slijedi proturječna nejednakost**

$$\boldsymbol{f(x)=f(y+(x-y))=f(x)+f(x-y)>f(y)=y}$$

stoga mora biti $\boldsymbol{f(x)=x}$ **za** $\boldsymbol{\forall x>0}$**.**

ZADATKE PRIPREMILA

dr. IVANA ZUBAC

NATJECATELJSKA KOMISIJA – SŠ

1. **MARINKO ANTUNOVIĆ, prof.**
2. **Dr. IVANA ZUBAC**

REZULTATI

NATJECANJA IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBIH

Livno 21. ožujka 2026. g.

1. razred

1. **mjesto - Marija Marić - Gimnazija fra Grge Martića, Mostar**
2. **mjesto - Matea Vukić - ŠC fra Martina Nedića, Orašje**
3. **mjesto - Vito Ćavar - Gimnazija fra Dominika Mandića, Široki Brijeg**

2. razred

1. **mjesto - Nikola Goluža - Gimnazija fra Grge Martića, Mostar**
2. **mjesto - Petar Raič - Gimnazija fra Grge Martića, Mostar**
3. **mjesto - Petar Ćurić - Srednja strukovna škola Tomislavgrad**

3. razred

1. **mjesto - Roko Lucić - ŠC fra Martina Nedića, Orašje**
2. **mjesto - Nadan Rizvanović - Gimnazija Mostar**
3. **mjesto - Marija Martinović - Gimnazija fra Dominika Mandića, Široki Brijeg**

4. razred

1. **mjesto - Matea Čuljak - Srednja škola Čapljina**
2. **mjesto - Jure Čolak - Gimnazija fra Dominika Mandića, Široki Brijeg**
3. **mjesto – Ante Penava - Gimnazija fra Grge Martića, Posušje**

POPIS UČENIKA KOJI SU SE PLASIRALI NA MATEMATIČKU OLIMPIJADU BIH

Banja Luka, 18. i 19. travnja 2026.

1. **Marija Marić - Gimnazija fra Grge Martića, Mostar**
2. **Matea Vukić - ŠC fra Martina Nedića, Orašje**
3. **Nikola Goluža - Gimnazija fra Grge Martića, Mostar**
4. **Petar Raič - Gimnazija fra Grge Martića, Mostar**
5. **Ante Penava – Gimnazija fra Grge Martića, Posušje**
6. **Matea Čuljak – Srednja škola Čapljina**
7. **Jure Čolak - Gimnazija fra Dominika Mandića, Široki Brijeg**
8. **Roko Lucić - ŠC fra Martina Nedića, Orašje**
9. **Nadan Rizvanović - Gimnazija Mostar**
10. **Marija Martinović - Gimnazija fra Dominika Mandića, Široki Brijeg**

ŽUPANIJSKA NATJECANJA IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA HNŽ, ZHŽ, PŽ I HBŽ

VIII. i IX. razreda održana su 27. ožujka 2026. (Neum, Rakitno, Šuica i Tolisa)

VI. i VII. razreda održano je 15. svibnja 2026. (Buna, Biograci, Šuica i Bok)

PROGRAM NATJECANJA 27. OŽUJKA

Do 12:00	**Dolazak sudionika natjecanja u zgradu škole domaćina**
12:45	**Otvaranje natjecanja**
13:00-14:30	**Natjecanje učenika – izrada zadataka**
14:00-16:00	**Rad komisija – pregled učeničkih radova**
16:00	**Neslužbeni rezultati natjecanja (pod šiframa)**
16:30	**Službeni rezultati natjecanja, dodjela diploma i nagrada najuspješnijim učenicima**

PROGRAM NATJECANJA 15. SVIBNJA

Do 12:00	**Dolazak sudionika natjecanja u zgradu škole domaćina**
12:45	**Otvaranje natjecanja**
13:00-14:30	**Natjecanje učenika – izrada zadataka**
14:00-16:00	**Rad komisija – pregled učeničkih radova**
16:00	**Neslužbeni rezultati natjecanja (pod šiframa)**
16:30	**Službeni rezultati natjecanja, dodjela diploma i nagrada najuspješnijim učenicima**

Z A D A C I

8 . RAZRED

1. **Izračunaj:**

$$\frac{\frac{1}{0,01}\cdot 10,5-\left(\frac{11}{50}+\frac{3}{20}\right)\cdot 10^2}{\left(0,125+\frac{7}{8}:3\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{4}{3}}.$$

2. **Ukupan urod voća u dva voćnjaka bio je jedne godine 225 tona, a sljedeće je godine ukupan urod porastao za 40%. Koliki je bio urod voća prve godine u svakom voćnjaku, ako je druge godine urod povećan u prvom voćnjaku za 25%, a u drugom voćnjaku za 50%?**

3. **Veličine vanjskih kutova pravokutnog trokuta (koji nisu pravi) odnose se kao 7 : 11. Odredi veličine šiljastih kutova tog trokuta.**

4. **Neka su a, b, c nenegativni racionalni brojevi. Ako je $a(b+c)=36$, $b(a+c)=50$ i $c(a+b)=56$, koliko je abc?**

9 . RAZRED

1. **Riješi jednadžbu:**

$$\left(2\frac{3}{4}\cdot 3\frac{2}{3}\right):x=\left(\frac{11}{4}-\frac{11}{3}\right):\frac{3}{2}$$

2. **Koliko je $3x+2y$, ako je $x^2+y^2+xy=28$ i $8x-12y+xy=80$?**

3. **Unutar jednakostraničnog trokuta odabrana je točka T koja je od stranica trokuta udaljena redom za 1 cm, 2 cm i 3 cm. Kolika je površina tog trokuta?**

4. **Dražen je u prvih osam utakmica turnira ostvario prosjek od 18.5 koševa po utakmici. U preostalim utakmicama turnira njegov je prosjek bio 22 koša po utakmici. U svim utakmicama turnira njegov je prosjek bio 20 koševa po utakmici. Koliko je ukupno utakmica odigrao na tom turniru?**

R J E Š E N J A

8. RAZRED

Zadatak 1. **Izračunaj:**

$$\frac{\frac{1}{0,01}\cdot 10,5-\left(\frac{11}{50}+\frac{3}{20}\right)\cdot 10^2}{\left(0,125+\frac{7}{8}:3\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{4}{3}}.$$

RJEŠENJE:

$$\frac{\frac{1}{0,01}\cdot 10,5-\left(\frac{11}{50}+\frac{3}{20}\right)\cdot 10^2}{\left(0,125+\frac{7}{8}:3\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{4}{3}}=$$

$$\frac{100\cdot 10,5-\frac{22+15}{100}\cdot 100}{\left(\frac{1}{8}+\frac{7}{8}:\frac{7}{2}\right)\cdot\frac{4}{3}}=$$

$$\frac{1050-37}{\left(\frac{1}{8}+\frac{2}{8}\right)\cdot\frac{4}{3}}=$$

$$\frac{1013}{\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{3}}=$$

$$\frac{1013}{\frac{1}{2}}=2026$$

Zadatak 2. Ukupan urod voća u dva voćnjaka bio je jedne godine 225 tona, a sljedeće je godine ukupan urod porastao za 40%. Koliki je bio urod voća prve godine u svakom voćnjaku, ako je druge godine urod povećan u prvom voćnjaku za 25%, a u drugom voćnjaku za 50%?

RJEŠENJE:

Ako je urod voća prve godine u prvom voćnjaku bio x tona, onda je druge godine urod voća u prvom voćnjaku bio $1,25x$ tona.

Prema uvjetu zadatka, urod voća u drugom voćnjaku je prve godine bio $225 - x$ tona, a druge $1,5(225 - x) = 337,5 - 1,5x$ tona.

Kako je ukupan urod voća u drugoj godini porastao za 40%, vrijedi jednadžba:

$$1,25x + 337,5 - 1,5x = 1.4 \cdot 225 = 315$$

$$-0,25x = -22,5$$

$$x = 90$$

Zaključujemo, u prvom voćnjaku prve godine urod je voća bio 90 tona iz čega slijed da je urod u drugom voćnjak bio $225 - 90 = 135$ tona.

<u>Zadatak 3.</u> Veličine vanjskih kutova pravokutnog trokuta (koji nisu pravi) odnose se kao 7 : 11. Odredi veličine šiljastih kutova tog trokuta.

<u>RJEŠENJE</u>:

U pravokutnom trkutu jedan vanjski kut je pravi kut.

Neka su α_1 i β_1 veličine preostalih dvaju vanjskih kutova.

Zbroj veličine vanjskih kutova trokuta iznosi 360°, pa vrijedi:

$$\alpha_1 + \beta_1 + 90^\circ = 360^\circ$$

$$\alpha_1 + \beta_1 = 270^\circ$$

Budući da je $\alpha_1 : \beta_1 = 7 : 11$, postoji racionalni broj k takav da je $\alpha_1 = 7k$ i $\beta_1 = 11k$.

Tada je

$$7k + 11k = 270^\circ$$

$$18k = 270^\circ$$

$$k = 15^\circ$$

Iz toga slijedi

$$\alpha_1 = 7 \cdot 15^\circ = 105^\circ,$$

pa je

$$\alpha = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ.$$

Slijedi

$$\beta = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$$

Zadatak 4. **Neka su a, b, c nenegativni racionalni brojevi. Ako je $a(b+c) = 36$, $b(a+c) = 50$ i $c(a+b) = 56$, koliko je abc?**

RJEŠENJE:

Iz zadanih jednakosti imamo:

$$ab + ac = 36$$

$$ab + bc = 50$$

$$ac + bc = 56.$$

Zbrajanjem prethodnih triju jednakosti imamo

$$ab + ac + ab + bc + ac + bc = 36 + 50 + 56$$

$$2(ab + ac + bc) = 142$$

$$ab + ac + bc = 71.$$

Oduzmemo li od posljednje jednakosti, redom, tri zadane jednakosti dobivamo

$$bc = 71 - 36$$

$$bc = 35$$

$$ac = 71 - 50$$

$$ac = 21$$

$$ab = 71 - 56$$

$$ab = 15.$$

Iz $ab = 15$ i $ac = 21$ slijedi

$$\frac{ab}{ac} = \frac{15}{21}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{5}{7}$$

$$b = \frac{5}{7}c$$

Uvrštavanjem u $bc = 35$ dobivamo $\frac{5}{7}c \cdot c = 35$, odnosno $c^2 = 49$.

Odavde zbog uvjeta zadatka $c \geq 0$ slijedi $c = 7$, pa je $b = 5$ i $a = 3$.

Stoga je

$$abc = 7 \cdot 5 \cdot 3 = 105.$$

9. RAZRED

Zadatak 1. Riješi jednadžbu:

$$\left(2\frac{3}{4}\cdot 3\frac{2}{3}\right):x=\left(\frac{11}{4}-\frac{11}{3}\right):\frac{3}{2}$$

RJEŠENJE:

$$\left(\frac{11}{4}\cdot\frac{11}{3}\right):x=\frac{33-44}{12}:\frac{3}{2}$$

$$\frac{121}{12}:x=\frac{-11}{12}:\frac{3}{2}$$

$$\frac{-11}{12}\cdot x=\frac{121}{12}\cdot\frac{3}{2}$$

$$\frac{-11}{12}\cdot x=\frac{121}{8}$$

$$x=\frac{121}{8}\cdot\frac{-12}{11}$$

$$x=-\frac{33}{2}$$

Zadatak 2. Koliko je $3x + 2y$, ako je $x^2+y^2+xy=28$ i $8x-12y+xy=80$?

RJEŠENJE:

Iz druge jednadžbe je $xy=80-8x+12y$.

Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobijemo $x^2+y^2+80-8x+12y=28$, odnosno $x^2+y^2-8x+12y+52=0$.

Dopunjavanjem izraza do potpunog kvadrata dobivamo:

$$x^2-8x+16+y^2+12y+36-16-36+52=0$$

$$(x-4)^2+(y+6)^2=0$$

Zbroj dva kvadrata jednak je nuli samo ako su oba kvadrata jednaka nuli.

Slijedi

$$\boldsymbol{x-4=0\,,y+6=0}$$

$$\boldsymbol{x=4\,,y=-6}$$

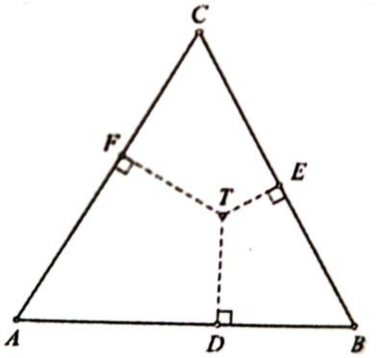
pa je

$$\boldsymbol{3x\;+\;2y=3\cdot 4+2\cdot(-6)=12-12=0\;.}$$

<u>Zadatak 3.</u> Unutar jednakostraničnog trokuta odabrana je točka T koja je od stranica trokuta udaljena redom za 1 cm, 2 cm i 3 cm. Kolika je površina tog trokuta?

<u>RJEŠENJE</u>:

Neka su $D, E,$ i F redom nožišta okomica iz točke T na stranice $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ kao na slici:



Prema uvjetu zadatka je $|TD|=1, |TE|=2, |TF|=3.$

Prikažimo sada površinu trokuta ABC kao zbroj površina triju trokuta:

$$P_{\Delta ABC}=P_{\Delta ABT}+P_{\Delta BCT}+P_{\Delta CAT}$$

Kako je površina trokuta jednaka umnošku duljina stranice i visine, imamo da je:

$$P_{\Delta ABC}=\frac{a\cdot|TD|}{2}+\frac{a\cdot|TE|}{2}+\frac{a\cdot|TF|}{2}=\frac{a}{2}(|TD|+|TE|+|TF|)=\frac{a}{2}(1+2+3)=3a\;.$$

S druge strane, površina jednakostraničnog trokuta je $P_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, pa izjednačavanjem dobivenih dvaju izraza za površinu slijedi da je $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=3a$, odakle je $a=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$.

Konačno, iz formule za površinu trokuta dobivamo

$$P_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{48\sqrt{3}}{4}=12\sqrt{3}\;cm^2.$$

<u>Zadatak 4</u>. Dražen je u prvih osam utakmica turnira ostvario prosjek od 18.5 koševa po utakmici. U preostalim utakmicama turnira njegov je prosjek bio 22 koša po utakmici. U svim utakmicama turnira njegov je prosjek bio 20 koševa po utakmici. Koliko je ukupno utakmica odigrao na tom turniru?

<u>RJEŠENJE</u>:

U prvih osam utakmica postigao je ukupno $18,5 \cdot 8 = 148$ koševa.
Neka je x broj dodatno odigranih utakmica s prosjekom od 22 koša po utakmici.
U tim je utakmicama postigao ukupno $22x$ koševa.
Ukupno je odigrao $8 + x$ utakmica.
Prosjek postignutih koševa u svim utakmicama je 20 koševa po utakmici, pa vrijedi

$$\frac{148 + 22x}{8 + x} = 20.$$

Slijedi

$$148 + 22x = 20(8 + x)$$

$$148 + 22x = 160 + 20x$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

Stjepan je ukupno odigrao $8 + 6 = 14$ utakmica.

ZADATKE PRIPREMIO

MARINKO ANTUNOVIĆ, prof.

REZULTATI

županijskih natjecanja iz matematike učenika VIII. i IX. razreda osnovnih škola HNŽ, ZHŽ, ŽP, i HBŽ održanih 27. ožujka 2026.

VIII. razred HNŽ - Neum

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Jakov Paradžik	O.Š. Ilije Jakovljevića, Mostar
II. mjesto	Ana Marijanović	O.Š. Petra Bakule, Mostar
III. mjesto	Mark Munetić	O.Š. Petra Bakule, Mostar

IX. razred

I. mjesto	Mihael Njavro	O.Š. kardinala Stepinca, Neum
II. mjesto	Ivana Marić	O.Š. S. S. Kranjčevića, Mostar
III. mjesto	Jakov Rozić	O.Š. A.B. Šimića, Mostar

VIII. razred ZHŽ - Rakitno

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Željko Šimić	O.Š. Ruđera Boškovića, Grude
II. mjesto	Ivan Marušić	Prva osnovna škola, Široki Brijeg
III. mjesto	Karl David Mucić	O.Š. Ivane Brlić - Mažuranić, Humac

IX. razred

I. mjesto	Teo Musa	Prva osnovna škola, Široki Brijeg
II. mjesto	Sara Sabljić	O.Š. Kočerin, Kočerin
III. mjesto	Bruna Majić	O.Š. A. B. i Stanislava Šimića, Drinovci

VIII. razred HBŽ - Šuica

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Josip Čelar	O.Š. Ivan Goran Kovačić, Livno
II. mjesto	David Gotovac	O.Š. Ivan Goran Kovačić, Livno
III. mjesto	Anđela Šimić	O.Š. fra Miroslava Džaje, Kupres

IX. razred

I. mjesto	Ante Džeko	O.Š. Ivan Goran Kovačić, Livno
II. mjesto	Ana Krišto	O.Š. Ivan Goran Kovačić, Livno
III. mjesto	Matej Pavić	O.Š. Ivan Goran Kovačić, Livno

VIII. razred ŽP - Tolisa

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Mihael Klaić	O.Š. Ruđera Boškovića, Donja Mahala
II. mjesto	Elna Džananović	O.Š. Vladimira Nazora, Odžak
III. mjesto	Ruža Oršolić	O.Š. fra Ilije Starčevića, Tolisa

IX. razred

I. mjesto	Ina Pavić	O.Š. Orašje, Orašje
II. mjesto	Svjetlana Klaić	O.Š. Ruđera Boškovića, Donja Mahala
III. mjesto	Mihael Nedić	O.Š. fra Ilije Starčevića, Tolisa

POPIS UČENIKA KOJI SU SE PLASIRALI NA JUNIORSKU MATEMATIČKU OLIMPIJADU BIH

Sarajevo, 23. svibnja 2026.

1. **Mihael Njavro - O.Š. kardinala Stepinca, Neum**
2. **Jakov Paradžik - O.Š. Ilije Jakovljevića, Mostar**
3. **Željko Šimić - O.Š. Ruđera Boškovića, Grude**
4. **Teo Musa - Prva osnovna škola, Široki Brijeg**
5. **Josip Čelar - O.Š. Ivan Goran Kovačić, Livno**
6. **Ante Džeko - O.Š. Ivan Goran Kovačić, Livno**
7. **Mihael Klaić - O.Š. Ruđera Boškovića, Donja Mahala**
8. **Ina Pavić - O.Š. Orašje, Orašje**

Z A D A C I

6 . RAZRED

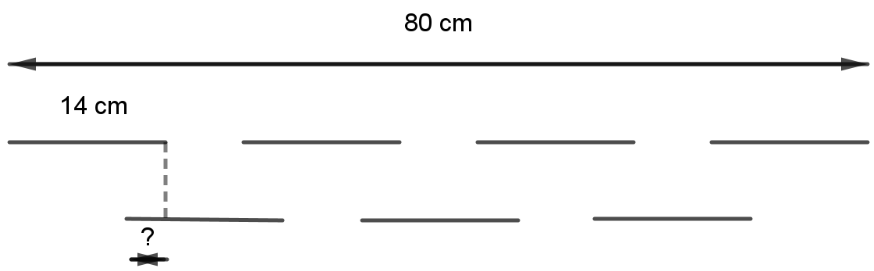
1. **Izračunaj**

$$\{57:[20-(9-4\cdot 2)]+[16-(-8+24:3\cdot 2)]+18:(6:2\cdot 3)\}:[15-(7-5)].$$

2. **Pronađi znamenke koje nedostaju:**

$$
\begin{array}{l}
\square\ 8\ \square\ \square : \square\ \square = 3\ \square\ \square \\
\underline{-5\ \square} \\
\ \ 1\ 4\ 2 \\
\underline{-\square\ \square\ \square} \\
\quad \square\ \square\ \square \\
\quad \underline{-1\ \ 6\ \ 2} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

3. **Sedam jednako dugih štapova postavljeni su kao na slici. Dijelovi koji se preklapaju su jednakih duljina. Kolika je duljina svakog tog dijela (koji se preklapa)?**
Napomena: Zadatak mora imati detaljno obrazložen postupak!



4. **Ako nekom broju zdesna dopišemo znamenku 9, dobiveni broj podijelimo s 13, dobivenom količniku zdesna dopišemo 1 i tako dobiveni broj podijelimo s 11, dobit ćemo 21. Odredi taj broj.**

7 . RAZRED

1. **Izračunaj**

$$\left\{\frac{\left[6.25-\left(3-\frac{5}{4}:\frac{10}{3}\right)\cdot 2\right]:\left(\frac{3}{2}-0.25\right)}{\frac{6}{5}}-\frac{\left[-1.5+\left(4-\frac{9}{4}\right)\cdot\frac{8}{5}\right]}{\frac{3}{4}:\left(1.2-\frac{2}{5}\right)}+\frac{5}{3}\right\}:\left[\frac{2.2}{\frac{4}{3}}-\frac{1}{2}\right]\cdot\frac{23}{71}$$

2. **U skupu cijelih brojeva riješi nejednadžbu**

$$\frac{1}{3}<\frac{2}{1-x}<\frac{3}{4}$$

.

3. **Površina pravokutnika je $20\ cm^2$, a duljine njegovih stranica izraženih u cm su prirodni brojevi. Koliki je opseg tog pravokutnika?**

4. **Odredi zbroj svih troznamenkastih brojeva djeljivih sa 7.**

R J E Š E N J A

6 . RAZRED

<u>Zadatak 1.</u> Izračunaj

$$\{57:[20-(9-4\cdot 2)]+[16-(-8+24:3\cdot 2)]+18:(6:2\cdot 3)\}:[15-(7-5)].$$

RJEŠENJE:

$$\{57:[20-(9-4\cdot 2)]+[16-(-8+24:3\cdot 2)]+18:(6:2\cdot 3)\}:[15-(7-5)]=$$

$$= \{57 : [20 - (9 - 8)] + [16 - (-8 + 8 \cdot 2)] + 18 : (3 \cdot 3)\} : [15 - 2] =$$

$$= \{57 : [20 - 1] + [16 - (-8 + 16)] + 18 : 9\} : 13 =$$

$$= \{57 : 19 + [16 + 8 - 16] + 2\} : 13 =$$

$$= \{3 + 8 + 2\} : 13 =$$

$$= 13 : 13 =$$

$$= 1$$

<u>Zadatak 2</u>. Pronađi znamenke koje nedostaju:

$$\begin{array}{l}
\square\ 8\ \square\ \square : \square\ \square = 3\ \square\ \square \\
\underline{-5\ \square} \\
\ \ 1\ \ 4\ \ 2 \\
\underline{-\square\ \square\ \square} \\
\quad\ \ \square\ \square\ \square \\
\quad\ \ \underline{-1\ \ 6\ \ 2} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

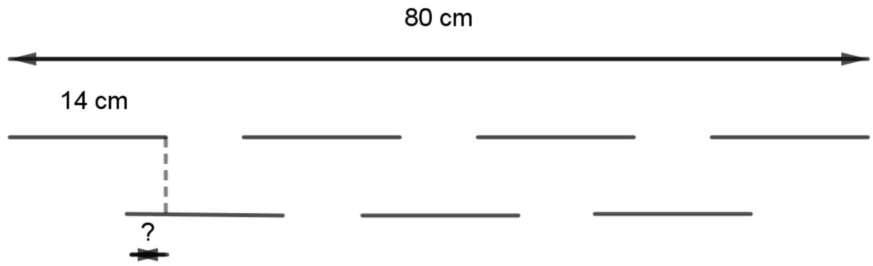
<u>RJEŠENJE</u>: Krenemo od posljednjeg pismenog oduzimanja, pa imamo:

$$\begin{array}{l}
\ \ 6\ \ 8\ \ 2\ \ 2 : \square\ \square = 3\ \square\ \square \\
\underline{-\ 5\ \ 4} \\
\ \ 1\ \ 4\ \ 2 \\
\underline{-\ 1\ \ 2\ \ 6} \\
\quad\ \ 1\ \ 6\ \ 2 \\
\quad\ \underline{-1\ \ 6\ \ 2} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Kada 68 podijelimo s djeliteljem dobijemo 3 i ostatak 14, pa je djelitelj 18, a količnik 379, odnosno:

$$\begin{array}{l} 6\ 8\ 2\ 2 : 1\ 8 = 3\ 7\ 9 \\ \underline{-5\ 4} \\ \ \ 1\ 4\ 2 \\ \underline{-1\ 2\ 6} \\ \quad\ \ 1\ 6\ 2 \\ \quad \underline{-1\ 6\ 2} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

<u>Zadatak 3.</u> Sedam jednako dugih štapova postavljeni su kao na slici. Dijelovi koji se preklapaju su jednakih duljina. Kolika je duljina svakog tog dijela (koji se preklapa)?
Napomena: Zadatak mora imati detaljno obrazložen postupak!



<u>RJEŠENJE</u>:

1.način: Ako sa x označimo dio koji se preklapa imamo jednadžbu $4 \cdot 14 + 3 \cdot (14 - 2x) = 80$, čije je rješenje $x = 3\ cm$.

2.način: Ako štapove stavimo jedan do drugoga ukupna duljina bi bila $7 \cdot 14 = 98\ cm$.
Pošto je na slici ukupna duljina 80 cm, razlika je $98 - 80 = 18\ cm$.
Dakle, ukupno se preklapa $18\ cm$, a pošto sa slike vidimo da ima 6 preklapanja, svako preklapanje je dugačko $3\ cm$.

<u>Zadatak 4</u>. Ako nekom broju zdesna dopišemo znamenku 9, dobiveni broj podijelimo s 13, dobivenom količniku zdesna dopišemo 1 i tako dobiveni broj podijelimo s 11, dobit ćemo 21. Odredi taj broj.

<u>RJEŠENJE</u>: Ako nekom prirodnom broju $\boldsymbol{n}$ zdesna dopišemo znamenku $\boldsymbol{x}$, dobit ćemo broj kojeg možemo zapisati u obliku $\boldsymbol{n \cdot 10 + x}$.

Primijetimo da traženi broj ne mora biti jednoznamenkast. Iz uvjeta zadatka dobijemo jednadžbu:

$$\{[(\boldsymbol{n} \cdot \mathbf{10} + \mathbf{9}) : \mathbf{13}] \cdot \mathbf{10} + \mathbf{1}\} : \mathbf{11} = \mathbf{21}$$

$$[(\boldsymbol{n} \cdot \mathbf{10} + \mathbf{9}) : \mathbf{13}] \cdot \mathbf{10} + \mathbf{1} = \mathbf{21} \cdot \mathbf{11}$$

$$[(\boldsymbol{n} \cdot \mathbf{10} + \mathbf{9}) : \mathbf{13}] \cdot \mathbf{10} = \mathbf{230}$$

$$(\boldsymbol{n} \cdot \mathbf{10} + \mathbf{9}) : \mathbf{13} = \mathbf{23}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \mathbf{10} + \mathbf{9} = \mathbf{299}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \mathbf{10} = \mathbf{290}$$

$$\boldsymbol{n} = \mathbf{29}$$

<u>7 . RAZRED</u>

<u>Zadatak 1</u>. Izračunaj izraz

$$\left\{\frac{\left[6.25 - \left(3 - \frac{5}{4} : \frac{10}{3}\right) \cdot 2\right] : \left(\frac{3}{2} - 0.25\right)}{\frac{6}{5}} - \frac{\left[-1.5 + \left(4 - \frac{9}{4}\right) \cdot \frac{8}{5}\right]}{\frac{3}{4} : \left(1.2 - \frac{2}{5}\right)} + \frac{5}{3}\right\} : \left[\frac{2.2}{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2}\right] \cdot \frac{23}{71}$$

<u>RJEŠENJE</u>:

$$\left\{\frac{\left[6.25 - \left(3 - \frac{5}{4} : \frac{10}{3}\right) \cdot 2\right] : \left(\frac{3}{2} - 0.25\right)}{\frac{6}{5}} - \frac{\left[-1.5 + \left(4 - \frac{9}{4}\right) \cdot \frac{8}{5}\right]}{\frac{3}{4} : \left(1.2 - \frac{2}{5}\right)} + \frac{5}{3}\right\} : \left[\frac{2.2}{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2}\right] \cdot \frac{23}{71}$$
$$= \left\{\frac{\left[\frac{25}{4} - \left(3 - \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{10}\right) \cdot 2\right] : \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right)}{\frac{6}{5}} - \frac{\left[-\frac{3}{2} + \frac{7}{4} \cdot \frac{8}{5}\right]}{\frac{3}{4} : \left(\frac{6}{5} - \frac{2}{5}\right)} + \frac{5}{3}\right\} : \left[\frac{\frac{11}{5}}{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2}\right] \cdot \frac{23}{71}$$

$$= \left\{ \frac{\left[\frac{25}{4} - 6 + \frac{3}{4}\right] : \frac{5}{4}}{\frac{6}{5}} - \frac{-\frac{3}{2} + \frac{14}{5}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4}} + \frac{5}{3} \right\} : \left[\frac{33}{20} - \frac{1}{2}\right] \cdot \frac{23}{71}$$

$$= \left\{ \frac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{5}} - \frac{\frac{13}{5}}{\frac{15}{8}} + \frac{5}{3} \right\} \cdot \frac{20}{23} \cdot \frac{23}{71}$$

$$= \left\{ \frac{7}{3} - \frac{104}{75} \right\} \cdot \frac{20}{71}$$

$$= \frac{71}{75} \cdot \frac{20}{71}$$

$$= \frac{4}{15}$$

<u>Zadatak 2</u>. U skupu cijelih brojeva riješi nejednadžbu

$$\frac{1}{3} < \frac{2}{1-x} < \frac{3}{4}$$

<u>RJEŠENJE</u>: Zadanu nejednakost možemo napisati u obliku

$$\frac{3}{1} > \frac{1-x}{2} > \frac{4}{3}$$

Svedemo razlomke na zajednički nazivnik

$$\frac{18}{6} > \frac{3(1-x)}{6} > \frac{8}{6}$$

odakle slijedi $\quad 8 < 3(1-x) < 18,$

tj.

$$\frac{8}{3} < 1-x < 6$$

Pošto tražimo rješenje u skupu cijelih brojeva, mora biti

$$2 < 1-x < 6$$

Odavde dobijemo da je $(1-x) \in \{3, 4, 5\}$, pa su rješenja

$$x \in \{-2, -3, -4\}$$

<u>Zadatak 3.</u> Površina pravokutnika je $20\ cm^2$, a duljine njegovih stranica izraženih u cm su prirodni brojevi. Koliki je opseg tog pravokutnika?

<u>RJEŠENJE</u>:

Formula za površinu pravokutnika je $P = a \cdot b$, pa vrijedi

$$a \cdot b = 20.$$

Broj 20 treba prikazati kao umnožak dvaju faktora koji su prirodni brojevi.
Zadatak će imati više rješenja, jer može biti

$a = 1\ cm$ $b = 20\ cm$	**ili**	$a = 2\ cm$ $b = 10\ cm$	**ili**	$a = 4\ cm$ $b = 5\ cm$

Kod zamjene duljina stranica, npr. $a = 20\ cm$, $b = 1\ cm$ nećemo dobiti nova rješenja, jer smo samo zamijenili oznake stranica. Za svaku mogućnost izračunamo opseg po formuli

$$O = 2a + 2b,$$

pa su mogući opsezi $42\ cm$, $24\ cm$ i $18\ cm$.

<u>Zadatak 4</u>. Odredi zbroj svih troznamenkastih brojeva djeljivih sa 7.

<u>RJEŠENJE</u>:

Troznamenkastih brojeva ima 900.
Pošto je $900 : 7 = 128$ i ost.4, zaključujemo da troznamenkastih brojeva djeljivih sa 7 ima 128.
To su brojevi

$$105, 112, 119, \dots, 980, 987, 994.$$

Traženi zbroj dobijemo primjenjujući Gaussovu dosjetku, zbrajamo:

$$(105 + 994) + (112 + 987) + \cdots =$$

$$64 \cdot 1099 = 70336$$

REZULTATI

županijskih natjecanja iz matematike učenika VI. i VII. razreda osnovnih škola HNŽ, ZHŽ, HBŽ i ŽP održanih 15. svibnja 2026.

VI. razred HNŽ - Buna

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Aljoša Stanić	O.Š. Ivana Gundulića, Mostar
II. mjesto	Tadeja Jelčić	Treća osnovna škola, Mostar
III. mjesto	Stojan Mandić	O.Š. Bartola Kašića, Mostar
VII. razred		
I. mjesto	Jakov Rakić	O.Š. Petra Bakule, Mostar
II. mjesto	Maria Ćubela	O.Š. Ivana Gundulića, Mostar
III. mjesto	Leona Šakota	O.Š. Ilije Jakovljevića, Mostar

VI. razred ZHŽ - Biograci

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Mihaela Paponja	O.Š. Ivana Mažuranića, Posušje
II. mjesto	Marija Rimac	Prva osnovna škola, Široki Brijeg
III. mjesto	Magdalena Jukić	O.Š. Ivana Mažuranića, Posušje
VII. razred		
I. mjesto	Jakov Mišetić	O.Š. Ivane Brlić - Mažuranić, Humac
II. mjesto	Ante Rudeš	O.Š. Ruđera Boškovića, Grude
III. mjesto	Marija Bakula	O.Š. Ivana Mažuranića, Posušje

VI. razred HBŽ - Šuica

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Marta Krneta	O.Š. „Nikola Tesla“, Drvar
II. mjesto	Franka Kovač	O.Š. Stjepana Radića, Kazaginac
III. mjesto	Danin Vrebac	O.Š. Ivan Goran Kovačić, Livno
VII. razred		
I. mjesto	Drago Krišto	O.Š. Ivan Goran Kovačić, Livno
II. mjesto	Jure Pavić	O.Š. Ivan Goran Kovačić, Livno
III. mjesto	Ivana Vrgoč	O.Š. fra Miroslava Džaje, Kupres

VI. razred ŽP - Bok

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Luka Džijan	O.Š. Orašje, Orašje
II. mjesto	Ivan Paradžik	O.Š. Vladimira Nazora, Odžak
III. mjesto	Josip Matanović	O.Š. A. Gustava Matoša, Vidovice
VII. razred		
I. mjesto	Benjamin Hadžiomerović	O.Š. Vladimira Nazora, Odžak
II. mjesto	Ema Ćošković	O.Š. Braće Radića, Domaljevac
III. mjesto	Mahir Delić	O.Š. Vladimira Nazora, Odžak

ZADATKE PRIPREMILA

dr. IVANA ZUBAC

ŽUPANIJSKA NATJECANJA SU PROVELE:

Marija Vranješ i Ivana Zubac – ZHŽ

Nora Šesto – HBŽ

Ljilja Drljo – HNŽ

Kadica Dominković – ŽP

ZAHVALJUJEMO SPONZORIMA KOJI SU POMOGLI ORGANIZIRANJE NATJECANJA MLADIH MATEMATIČARA UČENIKA OSNOVNIH I SREDNJIH ŠKOLA U BIH

Glavni sponzori:

- **JP Hrvatske telekomunikacije d.d. Mostar**
- **JP Elektroprivreda HZ-HB d.d. Mostar**

Ostali sponzori:

- **Ministarstvo znanosti, prosvjete, kulture i športa HBŽ**
- **Ministarstvo prosvjete, znanosti, kulture i športa ZHŽ**
- **Ministarstvo prosvjete, znanosti, kulture i športa PŽ**
- **Predsjednica Federacije BiH, gospođa Lidija Bradara**
- **Načelnik općine Žepče, gospodin Mato Zovko**
- **Načelnik općine Neum, gospodin Dragan Jurković**
- **Eagle Technology d.o.o. Žepče**
- **YUCA d.o.o. Žepče**
- **Profilisolation d.o.o. Žepče**
- **K-Projekt d.o.o. Žepče**

BILTEN uredio Marinko Antunović, prof.

Lipanj, 2026.

JP ELEKTROPRIVREDA
HRVATSKE ZAJEDNICE HERCEG BOSNE d.d. Mostar

HT eronet

Veza koja traje