

NATJECANJA IZ MATEMATIKE

UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA FEDERACIJE BIH

Visoko, 25. ožujka 2023.

UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA HNŽ I HBŽ

VIII. i IX. razreda održana su 1. travnja 2023. (Mostar, Kupres i Tolisa)

VI. i VII. razreda održano je 12. svibnja 2023. (Kupres i Bok)

BILTEN

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA ŽEPČE

NAKLADNIK
UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA

ZA NAKLADNIKA
MARINKO ANTUNOVIĆ, prof.

NAKLADA U 1000 PRIMJERA

SADRŽAJ

1. Program natjecanja učenika srednjih škola	3
2. Zadaci – srednja škola	4
3. Rješenja zadataka – SŠ	6
4. Rezultati natjecanja – SŠ	20
5. Program županijskih natjecanja učenika OŠ VI. do IX. razreda	21
6. Zadaci – VIII. I IX. razredi	22
7. Rješenja zadataka VIII. i IX. razreda	23
8. Rezultati natjecanja VIII. i IX. razreda	30
9. Zadaci – VI. i VII. razredi	31
10. Rješenja zadataka VI. i VII. razreda	33
11. Rezultati natjecanja VI. i VII. razreda	38
12. Sponzori natjecanja	39

PROGRAM NATJECANJA – SREDNJE ŠKOLE

- 09:30** **Sastanak profesora-pratitelja učenika**
- 10:00** **Svečano otvaranje natjecanja**
Sudionike natjecanja i goste pozdravili su:
Fra. Stipo Alandžak, ravnatelj FKG Visoko
Marinko Antunović, predsjednik UMRB Žepče
Lidija Bradara, predsjednica Federacije BiH koja je i otvorila
natjecanje
- 10:30-13:30** **Natjecanje učenika – izrada zadataka**
- 13:00-15:30** **Rad komisija – pregled učeničkih radova**
- 12:00-15:00** **Ručak za sve sudionike natjecanja**
- 15:30** **Neslužbeni rezultati natjecanja (pod šiframa)**
- 15:30-16:00** **Reklamacije učenika-natjecatelja Natjecateljskoj komisiji**
- 16:30** **Proglašenje službenih rezultata natjecanja, dodjela diploma i nagrada**
najuspješnijim učenicima
- 17:00** **Zatvaranje natjecanja**

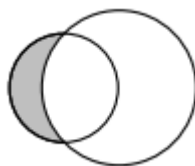
ZADACI

1. RAZRED

1. Neka su brojevi $x, y, z, a, b, c > 0$ i $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Ako je b aritmetička sredina za a i c , a y geometrijska sredina brojeva x i z , dokazati da je $x^b y^c z^a = x^c y^a z^b$.
2. Riješite algebarski i grafički sustav jednačbi

$$\begin{cases} |x| + |y| = 3 \\ 2|y| - x = 2 \end{cases}$$

3. Odrediti sve pravokutnike, čije su duljine stranica cijeli brojevi, kojima je opseg brojno jednak površini.
4. Dana je kružnica s polumjerom $\sqrt{2}$. Kružnica s polumjerom 2 ima središte na toj kružnici. Kolika je površina osjenčenog dijela lika?



2. RAZRED

1. Odrediti sve kompleksne brojeve z takve da vrijedi

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z+2}{2-i}\right) = 1 \quad \text{i} \quad \operatorname{Re}(z^2 + 1) = 1.$$

2. Odrediti broj cjelobrojnih rješenja nejednačbe:

$$|x^2 - 9x - 1| \leq \sqrt{21}.$$

3. Riješiti jednačbu

$$(x^2 + 3x - 4)^3 + (2x^2 - 5x + 3)^3 = (3x^2 - 2x - 1)^3.$$

4. Težišnica AD trokuta ABC siječe kružnicu upisanu u trokut u točkama M i N .
Odrediti $\sphericalangle MSN$ (S je središte upisane kružnice) ako je

$$|AB| + |AD| = |AC|.$$

3. RAZRED

1. Zadani su brojevi $a_1 = \log_2(3^x - 1)$, $a_2 = \log_4(9^x - 3^{x+1} + 2)$ i $a_3 = \log_2(3 - 3^x)$. Odredite sve vrijednosti x za koje su sva tri broja definirana a zatim riješite jednadžbu

$$a_1 + a_3 = 2a_2.$$

2. Stranice trokuta tri su uzastopna prirodna broja, a jedan od kutova trokuta je dva puta veći od jednog od preostala dva kuta. Odredite dužine stranica tog trokuta.
3. Neka je S vrh trostrane piramide $SABC$, takve da je $|SA| = |SB| = |SC| = a$, $\sphericalangle ASB = 60^\circ$, $\sphericalangle ASC = 90^\circ$, $\sphericalangle BSC = 120^\circ$. Dokazati da je baza ABC pravokutni trokut i odrediti oplošje piramide.
4. Zbroj znamenki broja x jednak je y , a zbroj znamenki broja y jednak je z . Odredite x , ako je $x + y + z = 60$.

4. RAZRED

5. Dokazati da je broj $3^{2^n} - 1$ djeljiv s 2^{n+2} , za $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.
6. Naći sve $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi

$$\begin{cases} \arg(z^3 + i \cdot z^3) = \frac{5\pi}{4} \\ \operatorname{Im}(z^5) = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

7. Kutovi konveksnog mnogokuta tvore aritmetički niz, $x, \frac{4}{3}x, \frac{5}{3}x, \dots$. Koliko najviše stranica može imati takav mnogokut?
8. Nađite sve funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju sljedeće uvjete
- 1) $f(x + f(y)) = f(x + y) + 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$
 - 2) $f(x)$ je strogo rastaća, tj. $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

RJEŠENJA

1. RAZRED

Zadatak 1. Neka su brojevi $x, y, z, a, b, c > 0$ i $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Ako je b aritmetička sredina za a i c , a y geometrijska sredina brojeva x i z , dokazati da je $x^b y^c z^a = x^c y^a z^b$.

RJEŠENJE:

Djeljenjem dobijemo

$$\frac{x^b y^c z^a}{x^c y^a z^b} = 1$$

odnosno

$$x^{b-c} y^{c-a} z^{a-b} = 1. \quad (1)$$

Na osnovi pretpostavki imamo

$$2b = a + c \quad \text{ili} \quad a - b = b - c$$

i

$$y^2 = xz.$$

Uvrštavanjem u izraz (1) imamo

$$x^{b-c} y^{c-a} z^{a-b} = x^{b-c} y^{c-a} z^{b-c} = (xz)^{b-c} y^{c-a} = (y^2)^{b-c} y^{c-a}.$$

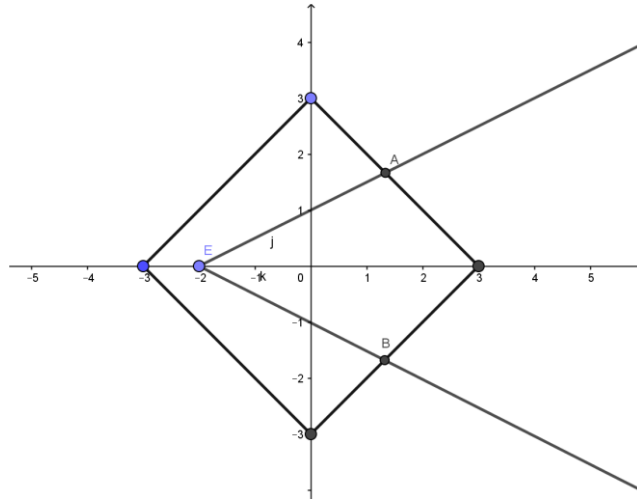
Daljnjim sređivanjem dobijemo

$$y^{2b-2c+c-a} = y^{2b-c-a} = y^{a+c-c-a} = y^0 = 1.$$

Zadatak 2. Riješite algebarski i grafički sustav jednažbi
$$\begin{cases} |x| + |y| = 3 \\ 2|y| - x = 2 \end{cases}$$

RJEŠENJE:

Grafičko rješenje je na slici:



Algebarski, riješimo sustav supstitucijom. Iz druge jednadžbe imamo $|y| = \frac{x}{2} + 1$. Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobijemo

$$|x| + \frac{x}{2} = 2.$$

1. Za $x < 0$

$$\begin{aligned} -x + \frac{x}{2} &= 2 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

$$|y| = \frac{-4}{2} + 1 = -1$$

Nema rješenja.

2. Za $x \geq 0$

$$\begin{aligned} x + \frac{x}{2} &= 2 \\ x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$|y| = \frac{5}{3}$$

$$y_{1,2} = \pm \frac{5}{3}$$

Znači, sustav ima dva rješenja: $A\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ i $B\left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right)$.

Zadatak 3. Odrediti sve pravokutnike, čije su duljine stranica cijeli brojevi, kojima je opseg brojno jednak površini.

RJEŠENJE:

Iz zadatka je poznato

$$2a + 2b = ab.$$

Uvedimo smjenu $a = c + 2$, $b = d + 2$, te imamo:

$$2(c + 2) + 2(d + 2) = (c + 2)(d + 2),$$

$$2c + 4 + 2d + 4 = cd + 2c + 2d + 4.$$

slijedi da je $cd = 4$.

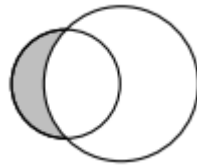
Pošto je uvjet da su stranice cjelobrojne imamo dva rješenja:

$$1) \quad c = d = 2 \quad \Rightarrow \quad a = b = 4 \text{ ili}$$

$$2) \quad c = 1, \quad d = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 3, \quad b = 5.$$

Obrnutoj kombinaciji $c = 4, \quad d = 1$ odgovara isti pravokutnik.

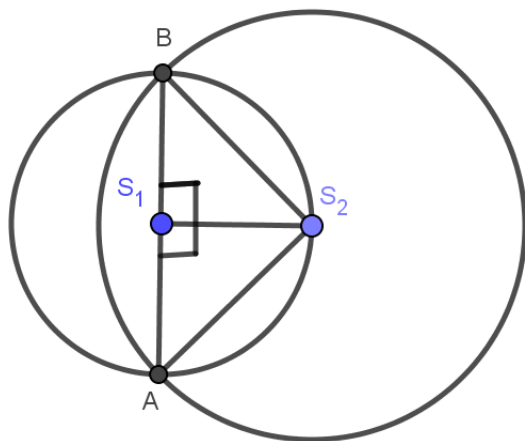
Zadatak 4. Dana je kružnica s polumjerom $\sqrt{2}$. Kružnica s polumjerom 2 ima središte na toj kružnici. Kolika je površina osjenčenog dijela lika?



RJEŠENJE:

Neka su S_1 i S_2 središta kružnica, a A i B presječne točke, pa vrijedi

$$|S_1S_2| = |S_1A| = |S_1B| = \sqrt{2} \quad \text{i} \quad |S_2A| = |S_2B| = 2.$$



$\triangle AS_1S_2$ i $\triangle BS_1S_2$ su jednakokračni pravokutni s pravim kutom u točki S_1 . $\triangle AS_2B$ je pravokutan s pravim kutom u točki S_2 (obodni kut nad promjerom kružnice \overline{AB}).

Tražena površina tada je jednaka razlici polovice površine kruga s polumjerom $\sqrt{2}$ i kružnog odsječka što ga od kruga s polumjerom 2 odsjeca tetiva \overline{AB} .

$P_{od} = \frac{1}{4}\pi \cdot 2^2 - \frac{2 \cdot 2}{2}$ (razlika između četvrtine površine kruga s polumjerom 2 i površine trokuta $\triangle AS_2B$)

Znači, $P = \frac{1}{2}\pi \cdot (\sqrt{2})^2 - \left(\frac{1}{4}\pi \cdot 2^2 - \frac{2 \cdot 2}{2}\right)$, tj. $P = 2$.

2. RAZRED

Zadatak 1. Odrediti sve kompleksne brojeve z takve da vrijedi

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z+2}{2-i}\right) = 1 \quad \text{i} \quad \operatorname{Re}(z^2 + 1) = 1.$$

RJEŠENJE:

Uvrštavanjem $z = x + iy$, imamo:

$$\frac{z+2}{2-i} = \frac{x+iy+2}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{2x-y+4}{5} + \frac{x+2y+2}{5}i$$

$$z^2 + 1 = (x+iy)^2 + 1 = x^2 + 2xyi - y^2 + 1,$$

tj.

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z+2}{2-i}\right) = \frac{x+2y+2}{5}$$

$$\operatorname{Re}(z^2 + 1) = x^2 - y^2 + 1.$$

Uvjeti se svode na sustav

$$\begin{cases} \frac{x+2y+2}{5} = 1 \\ x^2 - y^2 + 1 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+2y = 3 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

Iz druge jednadžbe imamo $x^2 = y^2$, odnosno $x = \pm y$. Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobijemo $x = -3$ ili $x = 1$.

Znači, rješenja su

$$z_1 = -3 + 3i \quad i \quad z_2 = 1 + i.$$

Zadatak 2. Odrediti broj cjelobrojnih rješenja nejednadžbe:

$$|x^2 - 9x - 1| \leq \sqrt{21}.$$

RJEŠENJE:

Imamo sustav

$$-\sqrt{21} \leq x^2 - 9x - 1 \leq \sqrt{21}.$$

Rješenje prve nejednadžbe $x^2 - 9x - 1 + \sqrt{21} \geq 0$ je:	Rješenje druge nejednadžbe $x^2 - 9x - (1 + \sqrt{21}) \leq 0$ je:
$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4(\sqrt{21} - 1)}}{2}$ $x_{1,2} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{85}{4} - \sqrt{21}}$ $x_{1,2} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \sqrt{21} + 21}$ $x_{1,2} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{21}\right)^2}$ $x_1 = 5 - \sqrt{21}, \quad x_2 = 4 + \sqrt{21},$	$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 4(\sqrt{21} - 1)}}{2}$ $x_{1,2} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{85}{4} + \sqrt{21}}$ $x_{1,2} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \sqrt{21} + 21}$ $x_{1,2} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{21}\right)^2}$ $x_1 = 5 + \sqrt{21}, \quad x_2 = 4 - \sqrt{21},$
$x \in \langle -\infty, 5 - \sqrt{21} \rangle \cup [4 + \sqrt{21}, +\infty).$	$x \in [4 - \sqrt{21}, 5 + \sqrt{21}]$

Rješenje sustava je $[4 - \sqrt{21}, 5 - \sqrt{21}] \cup [4 + \sqrt{21}, 5 + \sqrt{21}]$.

Kako je $-1 < 4 - \sqrt{21} < 0 < 5 - \sqrt{21} < 1$ i $8 < 4 + \sqrt{21} < 9 < 5 + \sqrt{21} < 10$, slijedi da su jedina cjelobrojna rješenja 0 i 9.

Zadatak 3. Riješiti jednačbu

$$(x^2 + 3x - 4)^3 + (2x^2 - 5x + 3)^3 = (3x^2 - 2x - 1)^3.$$

RJEŠENJE:

Primjetimo da je $x^2 + 3x - 4 + 2x^2 - 5x + 3 = 3x^2 - 2x - 1$, pa uvodimo smjenu

$$x^2 + 3x - 4 = a$$

$$2x^2 - 5x + 3 = b.$$

Tada je $3x^2 - 2x - 1 = a + b$. Polazna jednačba je ekvivalentna sa

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3,$$

odnosno

$$ab(a + b) = 0.$$

Stoga su rješenja polazne jednačbe korijeni kvadratnih jednačbi

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0,$$

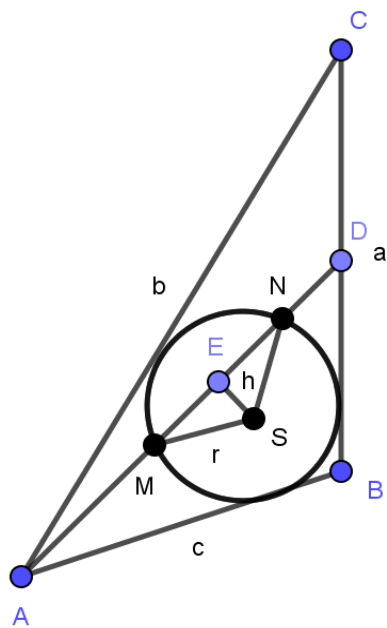
odnosno $x \in \left\{-4, 1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right\}$.

Zadatak 4. Težišnica AD trokuta ABC siječe kružnicu upisanu u trokut u točkama M i N .

Odrediti $\sphericalangle MSN$ (S je središte upisane kružnice) ako je

$$|AB| + |AD| = |AC|.$$

RJEŠENJE:



Neka su a, b, c stranice trokuta ABC , t_a težišnica \overline{AD} i neka je h udaljenost od središta S upisane kružnice do pravca AD , $h = |SE|$.

Kako je $|AC| > |AB| \Rightarrow \sphericalangle BAD > \sphericalangle CAD$, pa točka S leži unutar $\triangle ABD$.

Otuda je

$$P_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \left(c \cdot r + \frac{a}{2} \cdot r + t_a \cdot h \right),$$

a kako je

$$P_{\triangle ABC} = 2 \cdot P_{\triangle ABD}$$

$$\text{i } P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} (a + b + c)r,$$

slijedi da je

$$\frac{1}{2} (ar + br + cr) = c \cdot r + \frac{a}{2} \cdot r + t_a \cdot h$$

$$\frac{1}{2} r(b - c) = t_a \cdot h,$$

uvrštavanjem danog uvjeta u obliku $b - c = t_a$, slijedi da je $h = \frac{r}{2}$.

Iz tog slijedi $\cos(\sphericalangle NSE) = \frac{1}{2}$, pa je traženi kut $|\sphericalangle MSN| = 120^\circ$.

3. RAZRED

Zadatak 1. Zadani su brojevi $a_1 = \log_2(3^x - 1)$, $a_2 = \log_4(9^x - 3^{x+1} + 2)$ i $a_3 = \log_2(3 - 3^x)$. Odredite sve vrijednosti x za koje su sva tri broja definirana a zatim riješite jednadžbu

$$a_1 + a_3 = 2a_2.$$

RJEŠENJE: Uvjeti su:

$3^x - 1 > 0$	$9^x - 3^{x+1} + 2 > 0$	$3 - 3^x > 0$
$3^x > 1$	smjena: $3^x = t$ $t^2 - 3t + 2 > 0$ $(t - 1)(t - 2) > 0$ $t \in \langle -\infty, 1 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$	$3^x < 3$
$x > 0$	$x \in \langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle \log_3 2, +\infty \rangle$	$x < 1$

Presjek sva tri uvjeta je

$$x \in \langle \log_3 2, 1 \rangle.$$

Postavljena jednačba se svodi na

$$\log_2(3^x - 1) + \log_2(3 - 3^x) = 2\log_4(9^x - 3^{x+1} + 2),$$

$$\log_2(3^x - 1)(3 - 3^x) = \log_2(9^x - 3^{x+1} + 2).$$

Uz smjenu $3^x = t$ dobijemo jednačbu

$$(t - 1)(3 - t) = (t - 1)(t - 2),$$

čija su rješenja

a) $t = 1 \Rightarrow x = 0 \notin \langle \log_3 2, 1 \rangle$

b) $t = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \log_3 \frac{5}{2} \in \langle \log_3 2, 1 \rangle$ jedino je rješenje jednačbe.

Zadatak 2. Stranice trokuta tri su uzastopna prirodna broja, a jedan od kutova trokuta je dva puta veći od jednog od preostala dva kuta. Odredite dužine stranica tog trokuta.

RJEŠENJE:

Neka je $a = n - 1$, $b = n$, $c = n + 1$. Tada je $\alpha < \beta < \gamma$. Razmotrimo tri moguća slučaja.

1) $\beta = 2\alpha$, koristeći sinusni i kosinusni poučak dobijamo

$$\cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{\sin \beta}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2a} = \frac{n}{2(n-1)}$$

$$\cos\alpha = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc} = \frac{n+4}{2(n+1)},$$

odakle slijedi $n = 2$, tj. $a = 1, b = 2, c = 3$, što je nemoguće.

$$2) \gamma = 2\alpha \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{n+1}{2(n-1)}$$

$$\cos\alpha = \frac{n+4}{2(n+1)},$$

$\Rightarrow n = 5$, tj. $a = 4, b = 5, c = 6$.

$$3) \gamma = 2\beta \Rightarrow$$

$$\cos\beta = \frac{n+1}{2n}$$

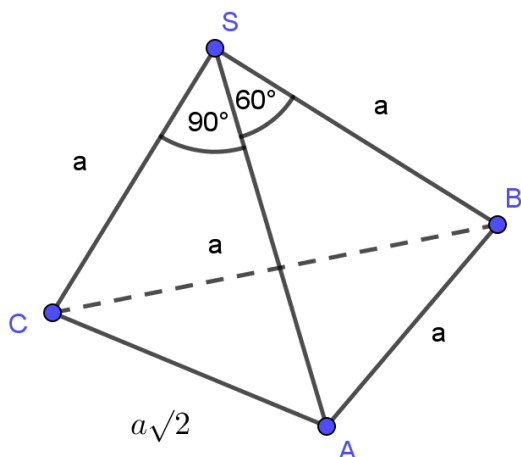
$$\cos\beta = \frac{n^2+2}{2(n^2-1)},$$

$$\Rightarrow n_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \notin \mathbb{N}.$$

Prema tome, jedino rješenje je trokut sa stranicama 4, 5 i 6.

Zadatak 3. Neka je S vrh trostrane piramide $SABC$, takve da je $|SA| = |SB| = |SC| = a$, $\sphericalangle ASB = 60^\circ$, $\sphericalangle ASC = 90^\circ$, $\sphericalangle BSC = 120^\circ$. Dokazati da je baza ABC pravokutni trokut i odrediti oplošje piramide.

RJEŠENJE:



U $\triangle SAB$, $\sphericalangle ASB = 60^\circ$ i $|SA| = |SB|$ pa je to jednakostranični trokut, odnosno i $|AB| = a$.

$\triangle SCA$ je jednakokrani pravokutni trokut, pa je $|AC| = a\sqrt{2}$.

U $\triangle SBC$, $\sphericalangle BSC = 120^\circ$ i $|SB| = |SC|$, pa je

$$|BC|^2 = |SB|^2 + |SC|^2 - 2|SB||SC| \cdot \cos 120^\circ \text{ (kosinusni teorem)} \Rightarrow |BC| = a\sqrt{3}.$$

Kako je $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$ slijedi da je $\triangle ABC$ pravokutni (pravi kut kod vrha A).

$$P_{\triangle SAB} = \frac{1}{2}|SA||SB| \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad P_{\triangle SAC} = \frac{a^2}{2}, \quad P_{\triangle SBC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad P_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2},$$

pa je oplošje piramide

$$O = \frac{a^2(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)}{2}.$$

Zadatak 4. Zbroj znamenki broja x jednak je y , a zbroj znamenki broja y jednak je z .
Odredite x , ako je $x + y + z = 60$.

RJEŠENJE:

Očigledno je x dvoznamenkasti broj, tj. $x = 10a + b$, pri čemu $a, b \in \{1, 2, \dots, 9\}$ i $a \neq 0$.
Slijedi da je $y = a + b$.

1) Ako je $a + b \leq 9$, tada je i $z = a + b$, pa je

$$60 = 10a + b + 2(a + b),$$

tj. $12a + 3b = 60$, odnosno

$$4a + b = 20.$$

Dakle, u ovom slučaju imamo $(a, b) \in \{(4, 4), (5, 0)\}$.

2) Ako je $a + b \geq 10$, tada je $z = a + b - 9$, pa je

$$60 = 12a + 3b - 9,$$

tj. $4a + b = 23$. Slijedi da je $(a, b) = (4, 7)$.

Dakle, $x \in \{44, 47, 50\}$.

4. RAZRED

Zadatak 1. Dokazati da je broj $3^{2^n} - 1$ djeljiv s 2^{n+2} , za $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

RJEŠENJE:

Dokažimo tvrdnju matematičkom indukcijom.

1) Provjerimo vrijedi li tvrdnja za $n = 1$:

$$3^{2^1} - 1 = 8, \quad 2^{1+2} = 8 \quad \Rightarrow \quad 8 = 8 \cdot 1.$$

2) Pretpostavimo da je za neko $n = k$, $3^{2^k} - 1$ djeljivo s 2^{k+2} .

3) Provjerimo vrijedi li tvrdnja za $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} 3^{2^{k+1}} - 1 &= 3^{2^k \cdot 2} - 1 = (3^{2^k})^2 - 1 = (3^{2^k} - 1)^2 + 2 \cdot 3^{2^k} - 2 = \\ &= (3^{2^k} - 1)^2 + 2 \cdot (3^{2^k} - 1) = (3^{2^k} - 1)(3^{2^k} + 1). \end{aligned}$$

Na osnovi 1., 2., i 3. koraka zaključujemo da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve.

Zadatak 2. Naći sve $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi
$$\begin{cases} \arg(z^3 + i \cdot z^3) = \frac{5\pi}{4} \\ \operatorname{Im}(z^5) = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

RJEŠENJE:

Iz prvog uvjeta zadatka imamo:

$$\arg(z^3 + i \cdot z^3) = \arg(z^3(1 + i)) = \arg(z^3) + \arg(1 + i)$$

$$3 \arg z + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad \arg z = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Znači,

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi_1 = \pi, \quad \varphi_2 = \frac{5\pi}{3}.$$

Iz drugog uvjeta imamo:

$$\operatorname{Im}(z^5) = r^5 \sin(5\varphi) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad r^5 = \frac{1}{2 \sin(5\varphi)}.$$

Razmotrimo slučajeve za $k = 0, 1, 2$:

$$k = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2 \sin \frac{5\pi}{3}} = -\frac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{2}}, \quad \text{nema rješenja.}$$

$$k = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2 \sin 5\pi} = -\frac{1}{2}, \quad \text{nema rješenja.}$$

$$k = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2 \sin \frac{25\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{\sqrt[10]{3}}$$

Rješenje: $z = \frac{1}{\sqrt[10]{3}} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right).$

Zadatak 3. Kutovi konveksnog mnogokuta tvore aritmetički niz, $x, \frac{4}{3}x, \frac{5}{3}x, \dots$ Koliko najviše stranica može imati takav mnogokut?

RJEŠENJE: Neka je n broj stranica, a kutovi izračeni u stupnjevima. Kako veličine kutova čine aritmetički niz, n -ti član niza je jednak:

$$\alpha_n = x + (n - 1) \cdot \frac{1}{3}x.$$

Kako je mnogokut konveksan, imamo uvjet $\alpha_n = x + (n - 1) \cdot \frac{1}{3}x < 180^\circ$. Zbroj kutova mnogokuta jednak je

$$\frac{\left(2x + \frac{1}{3}x(n - 1)\right)n}{2} = \frac{nx(n + 5)}{6} = (n - 2)180^\circ.$$

Slijedi da je

$$nx(n + 5) = 6(n - 2)180^\circ,$$

tj.

$$x = \frac{6(n - 2)180^\circ}{n(n + 5)}.$$

Zaključujemo da je

$$x + (n - 1) \cdot \frac{1}{3}x = \frac{180^\circ \cdot 6 \cdot (n - 2)(n + 2)}{3n(n + 5)} < 180^\circ,$$

$$\frac{2 \cdot (n - 2)(n + 2)}{n(n + 5)} < 1.$$

$$n^2 - 5n - 8 < 0$$

Slijedi da je

$$\frac{5 - \sqrt{57}}{2} < n < \frac{5 + \sqrt{57}}{2}.$$

Prema tome, najveći mogući broj stranica je 6.

Zadatak 4. Nadite sve funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju sljedeće uvjete

- 1) $f(x + f(y)) = f(x + y) + 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- 2) $f(x)$ je strogo rastuća, tj. $x > y \Rightarrow f(x) > f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$

RJEŠENJE:

Prema prvom uvjetu

$$f(x + f(y)) = f(x + y) + 1 = f(y + x) + 1 = f(y + f(x)).$$

Drugi uvjet pokazuje da je funkcija injekcija, pa iz

$$(x + f(y)) = f(y + f(x)) \Rightarrow x + f(y) = y + f(x).$$

Specijalno za $x = 0$ imamo $f(y) = y + f(0)$.

Uzimajući ovdje za argument $y + f(x)$, pa $y + x$ dobijemo:

$$\begin{cases} f(y + f(x)) = y + f(x) + f(0) \\ f(y + x) = y + x + f(0) \end{cases}.$$

Sada, iz uvjeta, $f(y + f(x)) = f(y + x) + 1$ slijedi

$$y + f(x) + f(0) = y + x + f(0) + 1,$$

Odnosno $f(x) = x + 1$.

ZADATKE PRIPREMILA

dr. IVANA ZUBAC

NATJECATELJSKA KOMISIJA – SŠ

- 1. MARINKO ANTUNOVIĆ, prof.**
- 2. Dr. IVANA ZUBAC**
- 3. MOMČILO VUJOVIĆ, prof.**

REZULTATI

NATJECANJA IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH

Visoko, 25. ožujka 2023.

I. razred

1. Ante Penava – Gimnazija fra Grge Martića Posušje
2. Jure Čolak – Gimnazija fra Dominika Mandića Široki Brijeg
3. Ana Ostojić – Gimnazija fra Grge Martića Mostar

II. razred

1. Dragan Boban – Gimnazija fra Grge Martića Mostar
2. Marko Antunović – Tehničko-obrtnička škola KŠC „Don Bosco“ Žepče
3. Nika Matijević – Gimnazija fra Grge Martića Mostar

III. razred

1. Marijan Vidović – Školski centar fra Martina Nedića Orašje
2. Magdalena Grbavac – Gimnazija fra Grge Martića Mostar
3. Antonija Bošković – Gimnazija fra Grge Martića Mostar

IV. razred

1. Anđela Milanović – Franjevačka klasična gimnazija Visoko
2. Mia Cvijanović – Srednja škola Kupres
3. Matea Mejdandžić – Srednja škola Uskoplje

POPIS UČENIKA KOJI SU SE PLASIRALI NA MATEMATIČKU OLIMPIJADU BIH

Sarajevo, 20. i 21. svibnja 2023.

1. Ante Penava - Gimnazija fra Grge Martića Posušje
2. Dragan Boban - Gimnazija fra Grge Martića Mostar
3. Marijan Vidović - ŠC fra Martina Nedića Orašje
4. Magdalena Grbavac - Gimnazija fra Grge Martića Mostar
5. Antonija Bošković - Gimnazija fra Grge Martića Mostar
6. Mladen Mandžo - SŠ fra Slavko Barbarić Čitluk
7. Darijo Obad - Gimnazija Čapljina
8. Robert Bakula - Gimnazija fra Grge Martića Posušje
9. Anđela Milanović - Franjevačka klasična gimnazija Visoko

ŽUPANIJSKA NATJECANJA IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA HNŽ I HBŽ

VIII. i IX. razreda održana su 1. travnja 2023. (Mostar, Kupres i Tolisa)

VI. i VII. razreda održano je 12. svibnja 2023. (Kupres i Bok)

PROGRAM NATJECANJA 1. TRAVNJA

Do 9:00	Dolazak sudionika natjecanja u zgradu škole domaćina
9:45	Otvaranje natjecanja
10:00-11:30	Natjecanje učenika – izrada zadataka
11:00-13:00	Rad komisija – pregled učeničkih radova
13:00	Neslužbeni rezultati natjecanja (pod šiframa)
13:30	Službeni rezultati natjecanja, dodjela diploma i nagrada najuspješnijim učenicima

PROGRAM NATJECANJA 12. SVIBNJA

Do 12:00	Dolazak sudionika natjecanja u zgradu škole domaćina
12:45	Otvaranje natjecanja
13:00-14:30	Natjecanje učenika – izrada zadataka
14:00-16:00	Rad komisija – pregled učeničkih radova
16:00	Neslužbeni rezultati natjecanja (pod šiframa)
16:30	Službeni rezultati natjecanja, dodjela diploma i nagrada najuspješnijim učenicima

ZADACI

8. RAZRED

1. Koliko posto iznosi broj $B = 6 - 6 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$ od broja

$$A = \left(-4\frac{1}{4} : (-0.85) - \frac{1}{2}\right) : \left[(-5.56 + 4.06) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\right].$$

2. Odredi realni broj a tako da jednađžbe

$$x \cdot \left(2a - \frac{2}{3}\right) = a - \frac{x}{3} + 4 \quad \text{i} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - x\right) = x - \frac{x+1}{2}$$

budu ekvivalentne.

3. Kroz jednu cijev utječe u bazen 4. 2l vode u svakoj sekundi, a kroz drugu cijev istječe 3. 6l vode u sekundi. Zamjeni li se prva cijev s 4 puta, a druga s 3 puta protočnijim cijevima (s bržim protokom) bazen će se puniti brže. Koliko je vremena potrebno prvom, a koliko drugom kombinaciji cijevi da napune bazen od 900hl?
4. Zadan je jednakokrani $\triangle ABC$ za koji vrijedi $|AC| = |BC|$. Visina iz vrha A na krak \overline{BC} dijeli kut $\sphericalangle BAC$ na dva kuta, tako da je njihova razlika 30° . Koliki su unutrašnji kutovi $\triangle ABC$?

9. RAZRED

1. Riješite jednađžbu

$$\left(2 - \frac{x-1}{3}\right)^2 - \left(1 - \frac{x-2}{3}\right)^2 = \frac{40}{9}.$$

2. Dokažite da je

$$\sqrt{2} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4 + 3\sqrt{2}}}$$

racionalni broj.

3. U pravokutnom trokutu ABC duljine kateta su $a = 40\text{cm}$, $b = 30\text{cm}$. Ako je točka D polovište hipotenuze, a E nožište visine na hipotenuzu, izračunaj duljinu dužine \overline{DE} ?
4. Dokazati da razlika proizvoljnog troznamenkastog prirodnog broja i broja koji se zapisuje istim znamenkama ali u obrnutom redosljedu ne može biti potpuni kvadrat.

RJEŠENJA

8. RAZRED

Zadatak 1. Koliko posto iznosi broj $B = 6 - 6 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$ od broja

$$A = \left(-4\frac{1}{4} : (-0.85) - \frac{1}{2}\right) : \left[(-5.56 + 4.06) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\right].$$

RJEŠENJE:

Izračunajmo prvo brojeve A i B:

$$A = \left(-4\frac{1}{4} : (-0.85) - \frac{1}{2}\right) : \left[(-5.56 + 4.06) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$A = \left(-\frac{17}{4} : \left(-\frac{85}{100}\right) - \frac{1}{2}\right) : \left[(-1.5) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$A = \left(-\frac{17}{4} \cdot \left(-\frac{20}{17}\right) - \frac{1}{2}\right) : \left[\left(-\frac{15}{10}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$A = \left(5 - \frac{1}{2}\right) : \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{1} = 9$$

$$B = 6 - 6 \cdot \frac{5}{6} = 6 - 5 = 1$$

Znači, $A = x = 9$, a $B = y = 1$.

Koristeći formulu $p\% = \frac{y}{x}$, imamo da je $p\% = \frac{1}{9}$ ili $p = 11\%$.

Zadatak 2. Odredi realni broj a tako da jednadžbe

$$x \cdot \left(2a - \frac{2}{3}\right) = a - \frac{x}{3} + 4 \quad \text{i} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - x\right) = x - \frac{x+1}{2}$$

budu ekvivalentne.

RJEŠENJE: Rješenja jednačbi su:

$x \cdot \left(2a - \frac{2}{3}\right) = a - \frac{x}{3} + 4$	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - x\right) = x - \frac{x+1}{2}$
$2ax - \frac{2x}{3} = a - \frac{x}{3} + 4 \quad / \cdot 3$ $6ax - 2x = 3a - x + 12$ $6ax - 2x + x = 3a + 12$ $x(6a - 1) = 3a + 12$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x = x - \frac{x+1}{2} \quad / \cdot 4$ $1 - 2x = 4x - 2x - 2$ $4x = 3$
$x = \frac{3a + 12}{6a - 1}$	$x = \frac{3}{4}$

Dvije jednačbe su ekvivalentne ako imaju isto rješenje, pa prema tome slijedi

$$\frac{3a + 12}{6a - 1} = \frac{3}{4},$$

odnosno

$$12a + 48 = 18a - 3$$
$$-6a = -51,$$

pa je rješenje $a = \frac{51}{6} = \frac{17}{2}$.

Zadatak 3. Kroz jednu cijev utječe u bazen 4. 2l vode u svakoj sekundi, a kroz drugu cijev istječe 3. 6l vode u sekundi. Zamjeni li se prva cijev s 4 puta, a druga s 3 puta protočnijim cijevima (s bržim protokom) bazen će se puniti brže. Koliko je vremena potrebno prvom, a koliko drugom kombinaciji cijevi da napune bazen od 900hl?

RJEŠENJE:

Prva kombinacija cijevi:

$$4.2 - 3.6 = 0.6l \text{ u } 1s$$

Vrijeme potrebno da se napuni bazen je:

$$900hl: 0.6l = 900\ 000: 6 = 150\ 000,$$

tj.

$$150\ 000s = 41h\ 40min.$$

Druga kombinacija cijevi:

$$4.2 \cdot 4 - 3.6 \cdot 3 = 6l \text{ u } 1s$$

Vrijeme potrebno da se napuni bazen je:

$$900hl: 6l = 90\ 000: 6 = 15\ 000,$$

tj.

$$15\ 000s = 4h\ 10min.$$

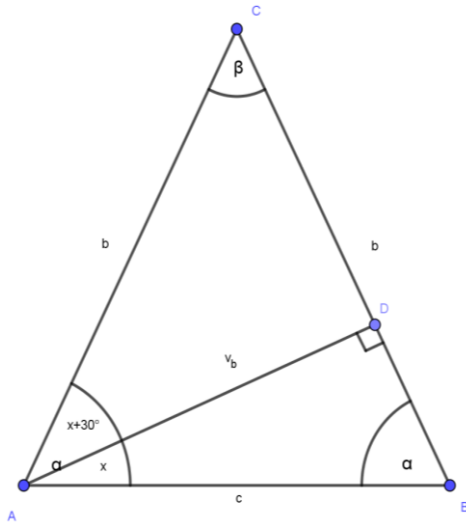
Znači, prvoj kombinaciji je potrebno 10 puta više vremena, jer je:

$$41\frac{2}{3} : 4\frac{1}{6} = 10.$$

Zadatak 4. Zadan je jednakokrani $\triangle ABC$ za koji vrijedi $|AC| = |BC|$. Visina iz vrha A na krak \overline{BC} dijeli kut $\sphericalangle BAC$ na dva kuta, tako da je njihova razlika 30° . Koliki su unutrašnji kutovi $\triangle ABC$?

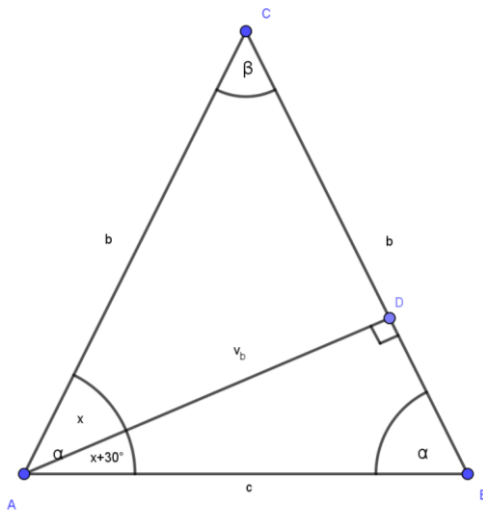
RJEŠENJE: Neka je D nožište visine iz vrha A na krak \overline{BC} . Razlikujemo 2 slučaja.

1° slučaj:



$\sphericalangle BAD = x \Rightarrow \sphericalangle CAD = x + 30^\circ \quad \sphericalangle BAC = 2x + 30^\circ$
 $\triangle ABD$ je pravokutan, a zbog $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$ slijedi
 da je $x + 2x + 30^\circ = 90^\circ$, tj. $x = 20^\circ$, pa je
 $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = 70^\circ$ i $\sphericalangle ACB = 40^\circ$.

2° slučaj:



$\sphericalangle CAD = x \Rightarrow \sphericalangle BAD = x + 30^\circ \quad \sphericalangle BAC = 2x + 30^\circ$

Sad vrijedi jednačba

$$x + 30^\circ + 2x + 30^\circ = 90^\circ,$$

tj. $x = 10^\circ$, pa je

$\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = 50^\circ$ i $\sphericalangle ACB = 80^\circ$.

9. RAZRED

Zadatak 1. Riješite jednačbu

$$\left(2 - \frac{x-1}{3}\right)^2 - \left(1 - \frac{x-2}{3}\right)^2 = \frac{40}{9}.$$

RJEŠENJE:

$$\left(2 - \frac{x-1}{3}\right)^2 - \left(1 - \frac{x-2}{3}\right)^2 = \frac{40}{9}$$

$$\left(\frac{6-x+1}{3}\right)^2 - \left(\frac{3-x+2}{3}\right)^2 = \frac{40}{9}$$

$$\frac{(7-x)^2}{9} - \frac{(5-x)^2}{9} = \frac{40}{9} \quad / \cdot 9$$

$$49 - 14x + x^2 - 25 + 10x - x^2 = 40$$

Nakon sređivanja dobijemo

$$-4x = 16$$

$$x = -4.$$

Zadatak 2. Dokažite da je

$$\sqrt{2} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4 + 3\sqrt{2}}}$$

racionalni broj.

RJEŠENJE:

Racionalizirajmo izraz pod drugim korijenom:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4 + 3\sqrt{2}}} &= \sqrt{2} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4 + 3\sqrt{2}} \cdot \frac{4 - 3\sqrt{2}}{4 - 3\sqrt{2}}} = \\ &= \sqrt{2} - \sqrt{\frac{-2(3 - 2\sqrt{2})}{-2}} = \sqrt{2} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Koristeći formulu za kvadrat razlike i da je $\sqrt{x^2} = |x|$, imamo:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} &= \sqrt{2} - \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} + 1} \\ &= \sqrt{2} - |\sqrt{2} - 1| \\ &= \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1 = 1. \end{aligned}$$

Zadatak 3. U pravokutnom trokutu ABC duljine kateta su $a = 40\text{cm}$, $b = 30\text{cm}$. Ako je točka D polovište hipotenuze, a E nožište visine na hipotenuzu, izračunaj duljinu dužine \overline{DE} ?

RJEŠENJE:

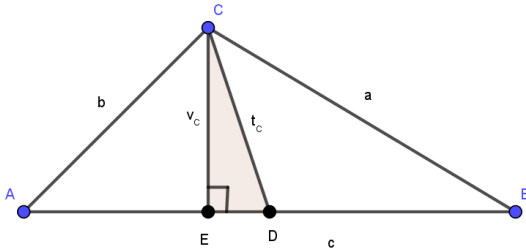
Primjenom Pitagorina poučka dobijemo:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 900 + 1600$$

$$c = \sqrt{2500}$$

$$c = 50\text{cm}$$



Površinu trokuta ABC možemo izračunati na dva načina

$$P_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{30 \cdot 40}{2} = 600 \quad \text{ili} \quad P_{\Delta ABC} = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

Iz druge formule imamo

$$600 = \frac{50 \cdot v_c}{2}, \quad \text{pa je } v_c = 24\text{cm}.$$

Traženu duljinu dužine \overline{DE} sad možemo odrediti na dva načina:

$$1^\circ \quad t_c = \frac{c}{2} = 25\text{cm} \quad \text{pa iz } \Delta CED \Rightarrow |ED| = \sqrt{t_c^2 - v_c^2} = \sqrt{625 - 579} = 7\text{cm}$$

$$2^\circ \quad \text{Iz } \Delta AEC \Rightarrow |AE| = \sqrt{30^2 - 24^2} = \sqrt{324} = 18\text{cm},$$

$$\text{pa iz uvjeta zadatka da je } |AD| = \frac{c}{2} \text{ i } |AE| + |ED| = \frac{c}{2} = 25 \Rightarrow |ED| = 7\text{cm}.$$

Zadatak 4. Dokazati da razlika proizvoljnog troznamenkastog prirodnog broja i broja koji se zapisuje istim znamenkama ali u obrnutom redoslijedu ne može biti potpuni kvadrat.

RJEŠENJE:

Traženi troznamenkasti broj zapišimo kao $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

Broj u obrnutom poretku $\overline{cba} = 100c + 10b + a$.

Izračunajmo njihovu razliku

$$\begin{aligned}\overline{abc} - \overline{cba} &= 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) \\ &= 100a + 10b + c - 100c - 10b - a \\ &= 99a - 99c = 99 \cdot (a - c).\end{aligned}$$

Da bi izraz bio potpuni kvadrat $a - c$ mora biti 99 ili 11, što nije moguće jer su a i c znamenke troznamenkastih brojeva.

REZULTATI

županijskih natjecanja iz matematike učenika VIII. i IX. razreda osnovnih škola HNŽ, HBŽ i ŽP održanih 1. travnja 2023.

VIII. razred HNŽ - Mostar

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Slavo Vidak Azinović	O.Š. Petra Bakule, Mostar
II. mjesto	Antonio Batinović	O.Š. Kardinala Stepinca, Neum
III. mjesto	Nikola Goliza	O.Š. Silvija Strahimira Kranjčevića, Mostar

IX. razred

I. mjesto	Roko Vidović	O.Š. Ivana Gundulića, Mostar
II. mjesto	Marko Ban	O.Š. Antuna Branka Šimića, Mostar
III. mjesto	Mihaela Bernadić	O.Š. Antuna Branka Šimića, Mostar

VIII. razred HBŽ - Kupres

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Drago Šarić	O.Š. fra Miroslava Džaje, Kupres
II. mjesto	Petar Čurić	O.Š. fra Mije Čuića, Bukovica
III. mjesto	Mateo Marijan	O.Š. fra Lovro Karaula, Livno

IX. razred

I. mjesto	Franka Karaula	O.Š. fra Lovro Karaula, Livno
II. mjesto	Ilijan Berić	O.Š. Ivan Goran Kovačić, Livno
III. mjesto	Filip Džaja	O.Š. Ivan Goran Kovačić, Livno

VIII. razred ŽP - Tolisa

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Nina Špionjak	O.Š. Orašje, Orašje
II. mjesto	Andela Oršolić	O.Š. Orašje, Orašje
III. mjesto	Marija Pejić	O.Š. Stjepana Radića u Boku

IX. razred

I. mjesto	Roko Lucić	O.Š. Braće Radića, Domaljevac
II. mjesto	Ana Radman	O.Š. Vladimira Nazora, Odžak
III. mjesto	Anja Baotić	O.Š. Ruđera Boškovića, Donja Mahala

POPIS

UČENIKA KOJI SU SE PLASIRALI NA JUNIORSKU MATEMATIČKU OLIMPIJADU BIH

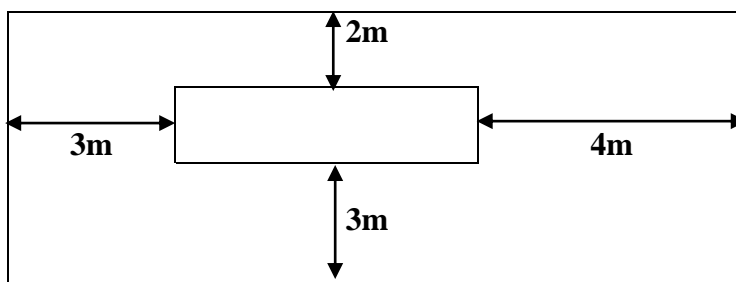
Visoko, 27. svibnja 2023.

1. Slavo Vidak Azinović - O.Š. Petra Bakule, Mostar
2. Franka Karaula - O.Š. Fra Lovro Karaula, Livno
3. Nina Špionjak - O.Š. Orašje, Orašje
4. Drago Šarić - O.Š. fra Miroslava Džaje, Kupres
5. Roko Lucić - O.Š. Braće Radića, Domaljevac
6. Roko Vidović - O.Š. Ivana Gundulića, Mostar

ZADACI

6. RAZRED

1. Izračunaj vrijednost brojevnog izraza :
 $2025 + 720 : (9 \cdot 8 - 9 \cdot 7) - (4 \cdot 6 - 6) \cdot 5 + 8$.
2. Umnožak broja godina svih članova četveročlane obitelji iznosi 36260. Koliko godina imaju članovi te obitelji ako se zna da je otac dvije godine stariji od majke, a kći tri godine mlađa od sina?
3. Na slici su dva pravokutnika kojim su odgovarajuće stranice paralelne. Kolika je razlika njihovih opsega?



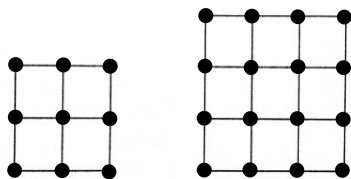
4. Marko želi u svoju sobu postaviti policu. Daske za policu mogu se postaviti u 4 ili 5 jednakih redova, ali njihova ukupna površina mora biti $1m^2$. U trgovini je pronašao daske duljine 125cm. Koliko dasaka i koje širine treba kupiti za svoju policu?

7. RAZRED

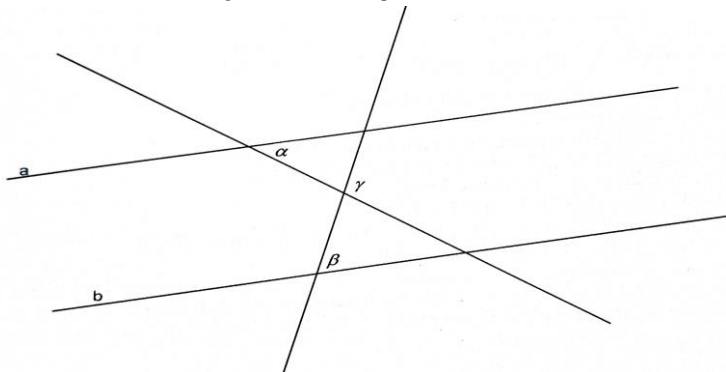
1. Izračunaj vrijednost izraza :

$$\left(1,5 + \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{5}{3} - \left[\left(0,25 + \frac{2}{3}\right) \cdot 0,75 - \frac{3}{20} \cdot \frac{5}{4}\right] : 3.$$

2. Na tramvajsko stajalište stigao je tramvaj sa 72 putnika. Iz tramvaja je izašlo $\frac{5}{12}$ putnika a ušlo 6 novih. Na sljedećem stajalištu ponovno je izašlo $\frac{5}{12}$ broja putnika, a ušlo je 8 novih. I na trećem stajalištu izašlo je $\frac{5}{12}$ broja putnika a ušlo je 10 novih. Koliko je putnika nakon toga nastavilo vožnju?
3. Ako kvadrat podijelimo na četiri jednaka kvadrata dobit ćemo 9 točaka prikazanih na slici. Ako ga podijelimo na 9 jednakih kvadrata dobivamo 16 točaka. Koliko će takvih točaka biti ako kvadrat podijelimo na 3600 jednakih kvadrata?



4. Izračunaj sa slike kut γ ako je $\alpha = 43^\circ$, $\beta = 65^\circ$ i $a \parallel b$.



RJEŠENJA

6. RAZRED

Zadatak 1. Izračunaj vrijednost brojevnog izraza :
 $2025 + 720 : (9 \cdot 8 - 9 \cdot 7) - (4 \cdot 6 - 6) \cdot 5 + 8.$

RJEŠENJE:

$$\begin{aligned} 2025 + 720 : (9 \cdot 8 - 9 \cdot 7) - (4 \cdot 6 - 6) \cdot 5 + 8 &= \\ &= 2025 + 720 : 9 - (24 - 6) \cdot 5 + 8 \\ &= 2025 + 80 - 18 \cdot 5 + 8 \\ &= 2105 - 90 + 8 \\ &= 2015 + 8 \\ &= 2023 \end{aligned}$$

Zadatak 2. Umnožak broja godina svih članova četveročlane obitelji iznosi 36260. Koliko godina imaju članovi te obitelji ako se zna da je otac dvije godine stariji od majke, a kći tri godine mlađa od sina?

RJEŠENJE:

Broj 36260 napišemo u obliku umnoška njegovih prostih faktora.

$$36260 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 37$$

Kako je otac najstariji pretpostavimo da on ima 37 godina. U tom slučaju, kako je majka mlađa od oca dvije godine, ona ima 35 godina. To nam daju faktori 5 i 7 ($7 \cdot 5 = 35$).

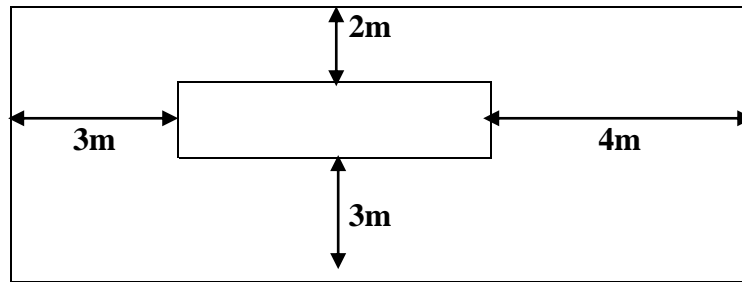
Na osnovu preostalih faktora 2, 2 i 7, uz činjenicu da je kći tri godine mlađa od sina, zaključujemo da sin ima 7 godina a kći 4.

$$36260 = 37 \cdot (5 \cdot 7) \cdot 7 \cdot (2 \cdot 2) = 37 \cdot 35 \cdot 7 \cdot 4$$

Lako možemo vidjeti da ne postoji druga kombinacija faktora koja ispunjava uvjete zadatka te je ovo i jedino rješenje.

Dakle, otac ima 37, majka 35, sin 7 i kćerka 4 godine.

Zadatak 3. Na slici su dva pravokutnika kojim su odgovarajuće stranice paralelne. Kolika je razlika njihovih opsega?



RJEŠENJE:

Označimo sa a i b duljine stranica manjeg pravokutnika.

Njegov opseg je $O_1 = 2 \cdot (a + b)$.

Prema slici, duljina duže stranice većeg pravokutnika je $3 + a + 4 = a + 7$, a kraće $3 + b + 2 = b + 5$.

Opseg većeg pravokutnika je $O_2 = 2(a + 7) + 2(b + 5)$

$$O_2 - O_1 = 2(a + 7) + 2(b + 5) - 2 \cdot (a + b)$$

$$O_2 - O_1 = 2a + 14 + 2b + 10 - 2a - 2b$$

$$O_2 - O_1 = 24m$$

Razlika opsega pravokutnika je $24m$.

Zadatak 4. Marko želi u svoju sobu postaviti policu. Daske za policu mogu se postaviti u 4 ili 5 jednakih redova, ali njihova ukupna površina mora biti $1m^2$. U trgovini je pronašao daske duljine $125cm$. Koliko dasaka i koje širine treba kupiti za svoju policu?

RJEŠENJE:

Ukupna površina police mora biti $1m^2 = 10000cm^2$.

Ako želi policu s 4 reda, površina svakog reda mora biti $2500cm^2$.

Kako je duljina daske $125cm$, širina daske mora biti $2500 : 125 = 20cm$.

Ako želi policu s 5 redova, površina svakog reda mora biti $2000cm^2$.

Širina je u tom slučaju $2000 : 125 = 16cm$.

Marko treba kupiti 4 daske širine $20cm$ ili 5 dasaka širine $16cm$.

7. RAZRED

Zadatak 1. Izračunaj vrijednost izraza :

$$\left(1,5 + \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{5}{3} - \left[\left(0,25 + \frac{2}{3}\right) \cdot 0,75 - \frac{3}{20} \cdot \frac{5}{4}\right] : 3.$$

RJEŠENJE:

$$\begin{aligned} & \left(1,5 + \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{5}{3} - \left[\left(0,25 + \frac{2}{3}\right) \cdot 0,75 - \frac{3}{20} \cdot \frac{5}{4}\right] : 3 = \\ & = \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{5}{3} - \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{20} \cdot \frac{5}{4}\right] : 3 \\ & = \frac{19}{10} \cdot \frac{5}{3} - \left[\frac{11}{12} \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}\right] : 3 \\ & = \frac{19}{2} \cdot \frac{1}{3} - \left[\frac{11}{4} \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}\right] : 3 \\ & = \frac{19}{6} - \frac{11 - 3}{16} : 3 \\ & = \frac{19}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \\ & = \frac{19}{6} - \frac{1}{6} \\ & = 3 \end{aligned}$$

Zadatak 2. Na tramvajsko stajalište stigao je tramvaj sa 72 putnika. Iz tramvaja je izašlo $\frac{5}{12}$ putnika a ušlo 6 novih. Na sljedećem stajalištu ponovno je izašlo $\frac{5}{12}$ broja putnika, a ušlo je 8 novih. I na trećem stajalištu izašlo je $\frac{5}{12}$ broja putnika a ušlo je 10 novih. Koliko je putnika nakon toga nastavilo vožnju?

RJEŠENJE:

Na prvom stajalištu izašlo je $\frac{5}{12}$ od 72 putnika, a ušlo 6 putnika, tako da je nastavilo vožnju

$$72 - \frac{5}{12} \cdot 72 + 6 = 72 - 30 + 6 = 48.$$

Na drugom stajalištu izašlo je $\frac{5}{12}$ od 48 putnika, a ušlo 8 putnika, tako da je nastavilo vožnju

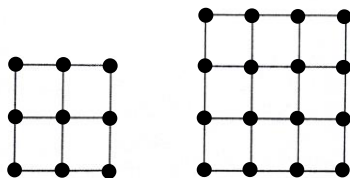
$$48 - \frac{5}{12} \cdot 48 + 8 = 48 - 20 + 8 = 36.$$

Na trećem stajalištu izašlo je $\frac{5}{12}$ od 36 putnika, a ušlo 8 putnika, tako da je nastavilo vožnju

$$36 - \frac{5}{12} \cdot 36 + 10 = 36 - 15 + 10 = 31.$$

Vožnju je nastavio 31 putnik.

Zadatak 3. Ako kvadrat podijelimo na četiri jednaka kvadrata dobit ćemo 9 točaka prikazanih na slici. Ako ga podijelimo na 9 jednakih kvadrata dobivamo 16 točaka. Koliko će takvih točaka biti ako kvadrat podijelimo na 3600 jednakih kvadrata?



RJEŠENJE:

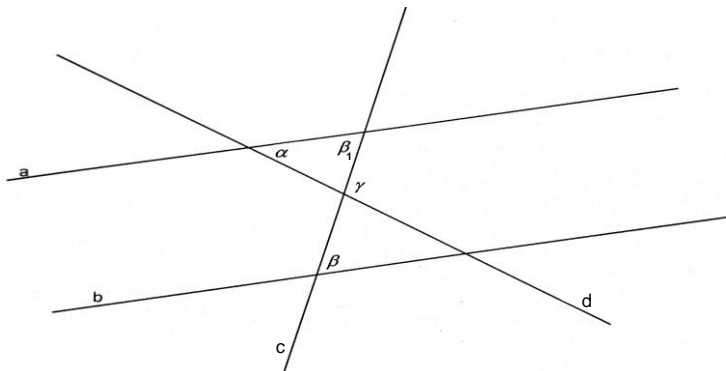
Kvadrat podjeljen na četiri jednaka manja kvadrata ima 2 retka i 2 stupca te je broj točaka jednak $(2 + 1)(2 + 1) = 3 \cdot 3 = 9$.

Kvadrat podjeljen na devet jednakih manjih kvadrata ima 3 retka i 3 stupca te je broj točaka jednak $(3 + 1)(3 + 1) = 4 \cdot 4 = 16$.

Onda kvadrat podjeljen na 3600 jednakih manjih kvadrata mora imati 60 redaka i 60 stupaca. U tom slučaju broj točaka mora biti $(60 + 1)(60 + 1) = 61 \cdot 61 = 3721$.

Ako kvadrat podijelimo na 3600 jednakih kvadrata dobijemo 3721 točku.

Zadatak 4. Izračunaj sa slike kut γ ako je $\alpha = 43^\circ$, $\beta = 65^\circ$ i $a \parallel b$.



RJEŠENJE:

Označimo jednu presječnicu pravaca a i b sa c, a drugu sa d, kao na slici.

Kako je pravac c presječnica pravaca a i b vrijedi da je $\beta = \beta_1 = 65^\circ$.

Zbroj kutova u trokutu je 180° , onda vrijedi :

$$\alpha + \beta_1 + 180^\circ - \gamma = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta_1 - \gamma = 180^\circ - 180^\circ$$

$$\alpha + \beta_1 - \gamma = 0$$

$$\alpha + \beta_1 = \gamma$$

$$\gamma = \alpha + \beta = 43^\circ + 65^\circ = 108^\circ.$$

REZULTATI

županijskih natjecanja iz matematike učenika VI. i VII. razreda osnovnih škola HBŽ i ŽP održanih 12. svibnja 2023.

VI. razred

HBŽ - Kupres

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Matej Pavić	O.Š. Ivan Goran Kovačić, Livno
II. mjesto	Maja Perić	O.Š. Ivana Mažuranića, Tomislavgrad
III. mjesto	Ante Džeko	O.Š. Ivan Goran Kovačić, Livno

VII. razred

I. mjesto	Luka Mišković	O.Š. Ivan Goran Kovačić, Livno
II. mjesto	Helena Petraković	O.Š. Drvar, Drvar
III. mjesto	Ivo Krišto	O.Š. Ivan Goran Kovačić, Livno

VI. razred

ŽP - Bok

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Jelena Prgić	O.Š. Rudera Boškovića, Donja Mahala
II. mjesto	Gabrijela Petrić	O.Š. Vladimira Nazora, Odžak
III. mjesto	Jakob Mikolić	O.Š. Braće Radića, Domaljevac

VII. razred

I. mjesto	Iva Mišković	O.Š. Braće Radića, Domaljevac
II. mjesto	Franjo Čulap	O.Š. Vladimira Nazora, Odžak
III. mjesto	Matija Lukačević	O.Š. Antuna Gustava Matoša, Vidovice

ZADATKE PRIPREMILI

dr. IVANA ZUBAC..... 8. i 9. razred

MARIJA ANTUNOVIĆ, prof. 6. i 7. razred

ŽUPANIJSKA NATJECANJA SU PROVELI:

Ilija Jezidžić i Nora Šesto – HBŽ

Dr. Ivana Zubac – HNŽ

Marinko Antunović – ŽP

**ZAHVALJUJEMO SPONZORIMA KOJI SU POMOGLI
ORGANIZIRANJE NATJECANJA MLADIH MATEMATIČARA
UČENIKA OSNOVNIH I SREDNJIH ŠKOLA U BIH**

Glavni sponzori:

- **JP Hrvatske telekomunikacije d.d. Mostar**
- **Elektroprivreda HZ-HB d.d. Mostar**
- **Hrvatska pošta d.o.o. Mostar**

Ostali sponzori:

- **Ministarstvo znanosti, prosvjete, kulture i športa HBŽ**
- **Ministarstvo prosvjete, znanosti, kulture i športa ŽZH**
- **Ministarstvo prosvjete, znanosti, kulture i športa ŽP**
- **Predsjednica Federacije BiH, gospođa Lidija Bradara**
- **Načelnik Općine Žepče, gospodin Mato Zovko**
- **Eagle Technology d.o.o. Žepče**
- **Profil-Isolation d.o.o. Žepče**
- **K-Projekt d.o.o. Žepče**

Posebna zahvala Franjevačkoj klasičnoj gimnaziji Visoko i ravnatelju fra. Stipi Alandžaku koji su ugostili dva najveća natjecanja koje je organizirala UMRB ove godine.

BILTEN uredio Marinko Antunović, prof.

Lipanj, 2023.



HT eronet

Veza koja traje

