UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Prozor, 24. ožujka 2018.

I. RAZRED

Zadatak 1. **Ako su a, b i c realni brojevi za koje je $a+b \neq 0$, $b+c \neq 0$, i $a+c \neq 0$, dokaži da izraz**

$$\left(1+\frac{c}{a+b}\right)\left(1+\frac{a}{b+c}\right)\left(1+\frac{b}{a+c}\right)-\frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b)(b+c)(a+c)}$$

ne ovisi o vrijednostima brojeva a, b i c.

RJEŠENJE:

$$\left(\frac{a+b+c}{a+b}\right)\left(\frac{a+b+c}{b+c}\right)\left(\frac{a+b+c}{a+c}\right)-\frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b)(b+c)(a+c)}=$$

$$=\frac{(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)}{(a+b)(b+c)(a+c)}=\frac{[(a+b+c)^3-a^3]-(b^3+c^3)}{(a+b)(b+c)(a+c)}$$

$$=\frac{(b+c)[(a+b+c)^2+a(a+b+c)+a^2]-(b+c)(b^2-bc+c^2)}{(a+b)(b+c)(a+c)}$$

$$=\frac{(b+c)[a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac+a^2+ab+ac+a^2-b^2+bc-c^2]}{(a+b)(b+c)(a+c)}$$

$$=\frac{3[a^2+ab+bc+ac]}{(a+b)(a+c)}=\frac{3\big(a(a+b)+c(a+b)\big)}{(a+b)(a+c)}=\frac{3(a+b)(a+c)}{(a+b)(a+c)}=3$$

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Prozor, 24. ožujka 2018.

I. RAZRED

Zadatak 2. Zadana je jednadžba $||x-2|-1| = a$. Za koju vrednost parametra a jednadžba ima najveći broj rešenja?

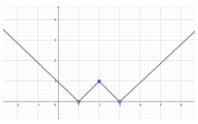
RJEŠENJE:

Promatramo funkciju na lijevoj strani

$$y = ||x-2|-1| \rightarrow \; y = \begin{cases} |2-x-1| = |1-x| & za \;\; x < 2 \\ |x-2-1| = |x-3| & za \;\; x \geq 2 \end{cases},$$ **odnosno**

$$y = ||x-2|-1| = \begin{cases} 1-x & za \;\; x < 1 \\ x-1 & za \;\; 1 \leq x < 2 \\ 3-x & za \;\; 2 \leq x < 3 \\ x-3 & za \;\; x \geq 3 \end{cases}.$$

Graf ove funkcije je prikazan na sljedećoj slici.



Sad promatramo presjek dobivene funkcije i pravca $y = a$.
Ako je $a < 0$ jednadžba nema rešenja, jer pravac $y = a$ ne siječe graf funkcije.
Ako je $a = 0$ jednadžba ima dva rešenja, jer pravac $y = a$ siječe graf funkcije u dvjema točkama (1, 0) i (3, 0).
Ako je $0 < a < 1$ jednadžba ima 4 rješenja, jer pravac $y = a$ siječe graf funkcije u četiri točke $(1 - a, a)$, $(1 + a, a)$, $(3 - a, a)$, $(3 + a, a)$.
Ako je $a = 1$, jednadžba ima 3 rješenja, jer pravac $y = a$ siječe graf funkcije u tri točke : (0, 1), (2, 1) i (4, 1).
Ako je $a > 1$, jednadžba ima 2 rješenja, jer pravac $y = a$ siječe graf funkcije u dvije točke $(1 - a, a)$ i $(3 + a, a)$.
Prema tome, najveći broj rješenja je 4 i dobije se za $0 < a < 1$.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Prozor, 24. ožujka 2018.

I. RAZRED

Zadatak 3. Jedna mostarska obitelj krenut će ove godine na ljetovanje u svoju kuću na moru, posljednjeg dana u mjesecu. Umnožak rednog broja dana polaska i rednog broja mjeseca povratka s brojem djece u obitelji i brojem dana ljetovanja je 18270. Odredite datum povratka. (Zadatak je riješen ako je dano valjano obrazloženje rješenja.)

RJEŠENJE:

Broj 18270 faktoriziramo, tj. $18270 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 29 = 30 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 29.$

30 – zadnji dan u mjesecu (ljetni mjeseci imaju 30 ili 31 dan – nemamo faktor 31, znači mora biti 30)

7 - redni broj mjeseca povratka (ljetni mjesec, jedino može biti 7. mjesec)

3 – broj djece u obitelji

29 – broj dana ljetovanja

Znači, vraćaju se 28.7.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Prozor, 24. ožujka 2018.

I. RAZRED

Zadatak 4. Odrediti sve pravokutne trokute sa stranicama duljina $a, b, c \in N$, takve da im je površina jednaka dvostrukom opsegu.

RJEŠENJE:

Prema uvjetu zadatka vrijedi $\frac{ab}{2} = 2(a+b+c)$.

$$\frac{ab}{2} - 2c = 2a + 2b \quad (*)$$

Nakon kvadriranja izraza dobijemo

$$\frac{a^2b^2}{4} - 2abc + 4c^2 = 4a^2 + 8ab + 4b^2.$$

Nakon primjene Pitagorina poučka $a^2 + b^2 = c^2$, odnosno $4a^2 + 4b^2 = 4c^2$, dobijemo

$$\frac{a^2b^2}{4} - 2abc = 8ab$$

$$2abc = \frac{a^2b^2}{4} - 8ab \quad / : \text{ab}$$

$$2c = \frac{ab}{4} - 8 \text{ , uvrstimo u (*) i dobijemo}$$

$$\frac{ab}{4} + 8 = 2a + 2b$$

$$b = \frac{8a-32}{a-8} = 8 + \frac{32}{a-8} \ .$$

Kako je $b \in N \rightarrow a - 8 \in \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$, odnosno $a \in \{9, 10, 12, 16, 24, 40\}$.
Znači, u pitanju su 3 trokuta sa stranicama duljina 9,40,41; 10,24,26 i 12,16,20.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Prozor24. ožujka 2018.

II. RAZRED

Zadatak 1. Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoji prirodan broj x, takav da je

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{x+n}+\sqrt{x+n+1}}=1.$$

RJEŠENJE:

Racionaliziranjem pojednostavimo dane razlomke. Za $k=0,1,2,\cdots,n$ vrijedi

$$\frac{1}{\sqrt{x+k}+\sqrt{x+k+1}}=\frac{\sqrt{x+k}-\sqrt{x+k+1}}{\left(\sqrt{x+k}+\sqrt{x+k+1}\right)\left(\sqrt{x+k}-\sqrt{x+k+1}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{x+k}-\sqrt{x+k+1}}{(x+k)-(x+k+1)}=$$

$$\sqrt{x+k+1}-\sqrt{x+k}.$$

Tako dobivamo novu jednakost

$$\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)+\cdots+\left(\sqrt{x+n+1}-\sqrt{x+n}\right)=1,$$

tj.

$$\sqrt{x+n+1}-\sqrt{x}=1, \text{ odnosno}$$

$$\sqrt{x+n+1}=\sqrt{x}+1,$$

Nakon kvadriranja dobivamo

$$x+n+1=x+1+2\sqrt{x},$$

odakle je

$$n=2\sqrt{x},$$

odnosno

$$x=\frac{n^2}{4}$$

Broj x je prirodan broj ako i samo ako je n paran, tj. $n=2k$, $k\in N$.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Prozor24. ožujka 2018.

II. RAZRED

Zadatak 2. Nađite sva rješenja jednadžbe

$$(x^2+3x-4)^3+(2x^2-5x+3)^3=(3x^2-2x-1)^3.$$

RJEŠENJE:

Uz zamjene $u=x^2+3x-4$, $v=2x^2-5x+3$, jednadžba poprima oblik

$$u^3+v^3=(u+v)^3, \text{ odnosno}$$
$$(u+v)^3-3u^2v-3uv^2=(u+v)^3$$
$$3uv(u+v)=0.$$

Odatle slijedi $u=0$ ili $v=0$ ili $u+v=0$, odnosno

$$x^2+3x-4=0 \;\; ili \;\; 2x^2-5x+3=0 \;\; ili \;\; 3x^2-2x-1=0$$

Dalje slijedi

$$x^2+3x-4=0 \text{ imamo } x_1=1,\ x_2=-4$$

$$2x^2-5x+3=0 \text{ imamo } x_3=1,\ x_4=\frac{3}{2},$$

$$3x^2-2x-1=0 \text{ imamo } x_5=1\,, x_6=-\frac{1}{3}$$

Te su sva rješenja zadane jednadžbe

$$x_1=1,\ x_2=-4,\ x_3=1,\ x_4=\frac{3}{2},\ x_5=1\,, x_6=-\frac{1}{3}\ .$$

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Prozor24. ožujka 2018.

II. RAZRED

Zadatak 3. **Odredi sve realne brojeve a takve da postoji kompleksan broj z za koji vrijedi**

$$|z| = 1 \qquad \text{i} \qquad |az - 1| = a|z + 1| \, .$$

RJEŠENJE:

Ako je $a < 0$ iz druge jednakosti zaključujemo da mora biti

$$|z + 1| = |az - 1| = 0$$

znači $z = -1$ i $a = -1$. Kako je i prva jednakost tada ispunjena, $a = -1$ je jedan od traženih brojeva.
Za $a = 0$ druga jednakost nema rješenja.
Ako je $a > 0$, onda iz druge jednakosti slijedi

$$|az - 1| = |az + a| \qquad (*)$$

Kako je $|w|^2 = w \cdot \bar{w}$ za $w \in C$, jednakost $(*)$ je ekvivalentna s

$$(az - 1)(a\bar{z} - 1) = (az + a)(a\bar{z} + a)$$
$$a^2 z\bar{z} - az - a\bar{z} + 1 = a^2 z\bar{z} + a^2 z + a^2 \bar{z} + a^2$$
$$(a^2 + a)(z + \bar{z}) = 1 - a^2$$

Odavde dobijemo $z + \bar{z} = \frac{1-a^2}{a(a+1)}$, jer je $a \neq 0, a \neq -1$ (uvjet je $a > 0$).

Kako je $z + \bar{z} = 2Rez$, zaključujemo da je $Rez = \frac{1-a^2}{2a(a+1)} = \frac{1-a}{2a}$.

Da bi postojao takav kompleksan broj z, za koji uz to vrijedi $|z| = 1$, nužno je i dovoljno da vrijedi $|Rez| \leq 1$, tj.

$$-1 \leq \frac{1 - a}{2a} \leq 1.$$

Odavde, zbog $a > 0$, dobivamo $a \geq \frac{1}{3}$.
Konačno, traženi brojevi su svi $a \in \{-1\} \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Prozor24. ožujka 2018.

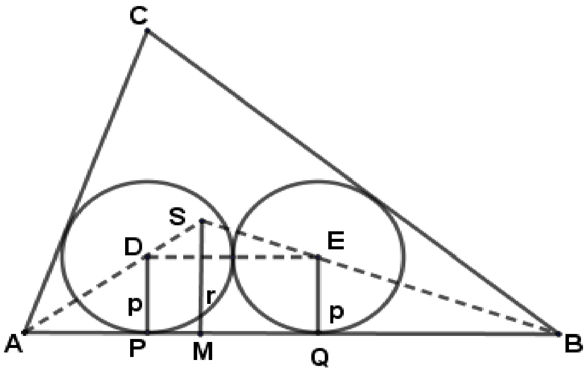
II. RAZRED

Zadatak 4. **Dvije kružnice jednakog polumjera ϱ upisane su u trokut ABC tako da se međusobno dodiruju, te jedna od njih dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, a druga stranice $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$.**
Dokaži da vrijedi

$$\frac{2}{|AB|}=\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{r},$$

gdje je r polumjer upisane kružnice trokuta ABC.

RJEŠENJE:



Uvedimo oznake kao na slici (S je središte upisane kružnice). Iz sličnosti trokuta $\Delta APD \sim \Delta AMS$, $\Delta BEQ \sim \Delta BSM$, dobiva se

$$|AP|:|AM|=\varrho:r$$
$$|BQ|:|BM|=\varrho:r$$

Kako je

$$|AP|+|PQ|+|QB|=|AB|$$

slijedi

$$\frac{\varrho}{r}|AM|+2\varrho+\frac{\varrho}{r}|BM|=|AB|$$

$$\frac{\varrho}{r}(|AM|+|BM|)+2\varrho=|AB|$$

$$\frac{\varrho}{r}(|AB|)+2\varrho=|AB|$$

$$2\varrho=\left(1-\frac{\varrho}{r}\right)|AB| \quad /:(\varrho\cdot|AB|)$$

$$\frac{2}{|AB|}=\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{r}$$

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Prozor24. ožujka 2018.

III. RAZRED

Zadatak 1. **Na nogometnom turniru svake dvije ekipe su se sastale samo po jednom. Po završetku turnira prvoplasirana ekipa osvojila je sedam bodova, drugoplasirana pet, a trećeplasirana tri boda. Koliko ekipa je sudjelovalo na tom turniru? (Svaka pobjeda donosi dva boda, neriješen rezultat jedan bod, a poraz nula bodova).**
(Zadatak je riješen ako je dano valjano obrazloženje rješenja.)

.

RJEŠENJE:

Neka je na turniru sudjelovalo n ekipa. Tada je odigrano ukupno $\frac{n(n-1)}{2}$ utakmica, pa kako svaka utakmica nosi 2 boda, to je osvojeno ukupno $n(n-1)$ bodova. Kako broj osvojenih bodova nije manji od $7+5+3$, to vrijedi

$$n(n-1) \geq 15.$$

slijedi

$$n^2 - n - 15 \geq 0$$

$$n \in \langle -\infty, -3] \cup [5, +\infty\rangle$$

Zbog uvjeta zadatka dobivamo

$$n \geq 5 \qquad (1)$$

S druge strane nijedna od preostalih $n-3$ ekipa sudionice turnira nije osvojila više od 3 boda, pa je ukupno na turniru osvojeno najviše $15 + 3(n-3)$ bodova, odakle slijedi

$$n(n-1) \leq 3n + 6$$

odnosno

$$n \leq 5 \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) slijedi

$$n = 5$$

Dakle, na turniru je sudjelovalo 5 ekipa.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Prozor, 24. ožujka 2018.

III. RAZRED

Zadatak 2. **Za koje realne vrijednosti $x > 1$ je izraz**

$$\mathbf{x}^{2-\log_a^2 x-\log_a x^2} - \frac{1}{x}$$ **pozitivan, pri čemu je $0 < a \neq 1$.**

RJEŠENJE:

$$\mathbf{x}^{2-\log_a^2 x-\log_a x^2} - \frac{1}{\mathbf{x}} > 0$$

Napišimo danu nejednadžbu u obliku

$$\mathbf{x}^{2-\log_a^2 x-\log_a x^2} > \mathbf{x}^{-1}$$

Iz uvjeta zadatka $x > 1$ posljednja nejednadžba je ekvivalentna s

$$2 - \log_a^2 x - \log_a x^2 > -1$$

$$\log_a^2 x + 2\log_a x - 3 < 0$$

odakle je

$$-3 < \log_a x < 1 \qquad (*)$$

1^0 $a > 1$

Iz $(*)$ slijedi $a^{-3} < x < a$,
No, $a > 1 \Rightarrow a^{-3} < 1$ i $x > 1$ daju $1 < x < a$

2^0 $0 < a < 1$

Iz $(*)$ slijedi $a < x < a^{-3}$,
No, $0 < a < 1 \Rightarrow 0a^3 < 1$ dalje imamo $a^{-3} > 1$ i $x > 1$ daju $1 < x < a^{-3}$.

Dakle, za $a > 1$ je $1 < x < a$, a za $0 < a < 1$ je $1 < x < a^{-3}$.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Prozor, 24. ožujka 2018..

III. RAZRED

Zadatak 3. **Nađi sva rješenja jednadžbe** $\operatorname{ctg}[2\pi\cos^2(2\pi x)] = 0$

RJEŠENJE:

Jednakost $\operatorname{ctg}[2\pi\cos^2(2\pi x)] = 0$ **je ispunjena ako i samo ako vrijedi**

$$2\pi cos^2(2\pi x) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ za } k \in Z, \text{ odnosno}$$

$$cos^2(2\pi x) = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}, \qquad k \in Z.$$

Vrijednosti funkcije $cos^2(2\pi x)$ **su iz intervala**$[0, 1]$**, pa** k **može biti 0 ili 1.**

Za $k = 0$ **dobivamo jednadžbu** $cos^2(2\pi x) = \frac{1}{4}$,

Pa vrijedi $cos(2\pi x) = \frac{1}{2}$ **ili** $cos(2\pi x) = -\frac{1}{2}$

Rješenja jednadžbe $cos(2\pi x) = \frac{1}{2}$ **su**

$$x \in \left\{\frac{1}{6} + m \ : m \in Z\right\} \cup \left\{\frac{5}{6} + m : \ m \in Z\right\}$$

a rješenja jednadžbe $cos(2\pi x) = -\frac{1}{2}$**:**

$$x \in \left\{\frac{1}{3} + m \ : m \in Z\right\} \cup \left\{\frac{2}{3} + m : \ m \in Z\right\}$$

Do sada nađena rješenja se mogu zapisati i ovako

$$x \in \left\{\frac{1}{6} + \frac{m}{2} \ : m \in Z\right\} \cup \left\{\frac{1}{3} + \frac{m}{2} : \ m \in Z\right\}.$$

Za $k = 1$ **dobivamo jednadžbu** $cos^2(2\pi x) = \frac{3}{4}$

Pa vrijedi $cos(2\pi x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **ili** $cos(2\pi x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Rješenje jednadžbe $cos(2\pi x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **su**

$$x \in \left\{\frac{1}{12} + m \ : m \in Z\right\} \cup \left\{\frac{11}{12} + m : \ m \in Z\right\}$$

a rješenja jednadžbe $cos(2\pi x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$x \in \left\{\frac{5}{12} + m \ : m \in Z\right\} \cup \left\{\frac{7}{12} + m : \ m \in Z\right\}$$

Ta rješenja se mogu zapisati i ovako

$$x \in \left\{\frac{1}{12} + \frac{m}{2} \ : m \in Z\right\} \cup \left\{\frac{5}{12} + \frac{m}{2} : \ m \in Z\right\}$$

Skup svih rješenja jednadžbe možemo zapisati još jednostavnije

$$x \in \left\{\frac{1}{12} + \frac{m}{4} \ : m \in Z\right\} \cup \left\{\frac{1}{6} + \frac{m}{4} : \ m \in Z\right\}$$

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Prozor, 24. ožujka 2018.

III. RAZRED

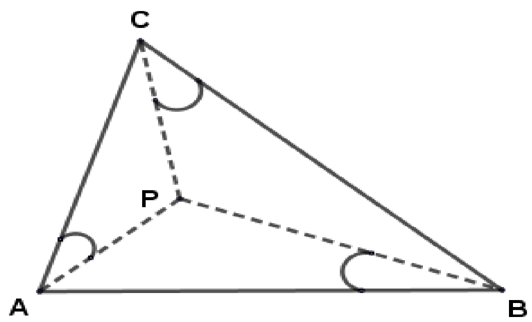
Zadatak 4. **Unutar šiljastokutnog trokuta ABC nalazi se točka P takva da je**

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle CBA + \sphericalangle ACB, \qquad \sphericalangle BPC = \sphericalangle ACB + \sphericalangle BAC.$$

Dokaži da vrijedi

$$\frac{|AC|\cdot|BP|}{|BC|} = \frac{|BC|\cdot|AP|}{|AB|}.$$

RJEŠENJE:



Označimo $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle CBA = \beta$ i $\sphericalangle ACB = \gamma$
Iz $\sphericalangle APB = \beta + \gamma$ i $\sphericalangle BPC = \gamma + \alpha$ slijedi

$$\sphericalangle CPA = 360^0 - \sphericalangle APB - \sphericalangle BPC = 360^0 - \beta - \gamma - \gamma - \alpha = \alpha + \beta.$$

Ako je $\sphericalangle PBA = x$, onda je

$$\sphericalangle BAP = 180^0 - \sphericalangle APB - \sphericalangle PBA = 180^0 - \beta - \gamma - x = \alpha - x, \text{ te}$$

$$\sphericalangle PAC = \sphericalangle BAC - \sphericalangle BAP = \alpha - (\alpha - x) = x.$$

Analogno dobijemo $\sphericalangle ACP = \gamma - x$, $\sphericalangle PCB = x$ i $\sphericalangle CBP = \beta - x$
Primjenom poučka o sinusima u trokutima ABP i BCP dobivamo

$$\frac{|AP|}{sinx} = \frac{|AB|}{sin(\beta+\gamma)} = \frac{|AB|}{sin\alpha} \quad i \quad \frac{|BP|}{sinx} = \frac{|BC|}{sin(\gamma+\alpha)} = \frac{|BC|}{sin\beta},$$

odakle zbog $sin\alpha : sin\beta = |BC| : |AC|$ dobivamo

$$\frac{|BP|}{|AP|} = \frac{|BC|sin\alpha}{|AB|sin\beta} = \frac{|BC|\cdot|BC|}{|AB|\cdot|AC|},$$

odnosno

$$\frac{|AC|\cdot|BP|}{|BC|} = \frac{|BC|\cdot|AP|}{|AB|}$$

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Prozor, 24. ožujka 2018.

IV. RAZRED

Zadatak 1. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi $(z-1)^4=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^5-i$ i za koje je $Rez>0, \mathrm{Im}z>0$

RJEŠENJE:

Trigonometrijski prikaz broja $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ je $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=cos\frac{11\pi}{6}+isin\frac{11\pi}{6}$

Zato je, prema Moivreovoj formuli,

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^5-i=\left(cos\frac{55\pi}{6}+isin\frac{55\pi}{6}\right)-i=$$
$$=cos\frac{7\pi}{6}+isin\frac{7\pi}{6}-i=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i-i=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$$

Trigonometrijski prikaz ovog broja je

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i=\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\sqrt{3}\left(cos\frac{4\pi}{3}+isin\frac{4\pi}{3}\right).$$

Vrijednosti četvrtih korijena ovog broja je

$$z_k'=\sqrt[8]{3}\left(cos\frac{2\pi+3k\pi}{6}+isin\frac{2\pi+3k\pi}{6}\right),\qquad k=0,1,2,3$$

Četiri broja koja zadovoljavaju početnu jednadžbu su

$$z_0=z_0'+1=\sqrt[8]{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt[8]{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)+1$$
$$z_1=z_1'+1=\sqrt[8]{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\sqrt[8]{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)+1$$
$$z_2=z_2'+1=\sqrt[8]{3}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)=\sqrt[8]{3}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)+1$$
$$z_3=z_3'+1=\sqrt[8]{3}\left(\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right)=\sqrt[8]{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)+1$$

$Rez_0=\frac{\sqrt[8]{3}}{2}+1>0, Imz_0=\frac{\sqrt[8]{3}\cdot\sqrt{3}}{2}>0$, dakle z_0 jeste rješenje.

$Rez_1=-\frac{\sqrt[8]{3}\cdot\sqrt{3}}{2}+1>0, Imz_1=\frac{\sqrt[8]{3}}{2}>0$, dakle z_1 jeste rješenje.

$Rez_2=-\frac{\sqrt[8]{3}}{2}+1>0, Imz_2=-\frac{\sqrt[8]{3}\cdot\sqrt{3}}{2}<0$, dakle z_2 nije rješenje.

$Rez_3=\frac{\sqrt[8]{3}\cdot\sqrt{3}}{2}+1>0, Imz_3=-\frac{\sqrt[8]{3}\cdot}{2}<0$, dakle z_0 nije rješenje.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Prozor, 24. ožujka 2018.

IV. RAZRED

Zadatak 2. **Neka je $n \geq 2$ prirodni broj i neka su $a_0, a_1, \cdots, a_n$ uzastopni članovi aritmetičkog niza.**
Dokaži da vrijedi

$$a_0 - \binom{n}{1} a_1 + \cdots + (-1)^k \binom{n}{k} a_k + (-1)^n \binom{n}{n} a_n = 0.$$

RJEŠENJE:

Za $n = 2$ tvrdnja $a_0 - 2a_1 + a_2 = 0$ je ekvivalentna s $a_1 - a_0 = a_2 - a_1$ što

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj $n \geq 2$.
Tada vrijedi

$$a_0 - \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} a_2 - \cdots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} a_{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n} a_n = 0 \quad (1)$$

No i brojevi $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ su uzastopni članovi aritmetičkog niza, pa vrijedi i

$$a_1 - \binom{n}{1} a_2 + \binom{n}{2} a_3 - \cdots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} a_n + (-1)^n \binom{n}{n} a_{n+1} = 0 \quad (2)$$

Oduzimanjem $(1) - (2)$ dobivamo

$$a_0 - \left[\binom{n}{1} + 1\right] a_1 + \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right] a_2 - \cdots + (-1)^n \left[\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}\right] a_n + (-1)^{n+1} \binom{n}{n} a_{n+1} = 0$$

a primjenom formula $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ (za $k = 0, 1, 2, \cdots, n$) i $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$ slijedi

$$a_0 - \binom{n+1}{1} a_1 + \binom{n+1}{2} a_2 - \cdots + (-1)^n \binom{n+1}{n} a_n + (-1)^{n+1} \binom{n+1}{n+1} a_{n+1} = 0$$

Time smo dokazali da tvrdnja zadatka vrijedi i za bilo kojih $n + 1$ uzastopnih članova aritmetičkog niza. Po principu matematičke indukcije, zaključujemo da tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj $n \geq 2$.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Prozor, 24. ožujka 2018..

IV. RAZRED

Zadatak 3. Nađi sva rješenja jednadžbe $\mathrm{ctg}[2\pi\cos^2(2\pi x)] = 0$

RJEŠENJE:

Jednakost $\mathrm{ctg}[2\pi\cos^2(2\pi x)] = 0$ je ispunjena ako i samo ako vrijedi

$$2\pi cos^2(2\pi x) = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \text{ za } k \in Z,\ \text{ odnosno}$$

$$cos^2(2\pi x) = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}, \qquad k \in Z.$$

Vrijednosti funkcije $cos^2(2\pi x)$ su iz intervala$[0, 1]$, pa k može biti 0 ili 1.

Za $k = 0$ dobivamo jednadžbu $cos^2(2\pi x) = \frac{1}{4}$,

Pa vrijedi $cos(2\pi x) = \frac{1}{2}$ ili $cos(2\pi x) = -\frac{1}{2}$

Rješenja jednadžbe $cos(2\pi x) = \frac{1}{2}$ su

$$x \in \left\{\frac{1}{6} + m\ : m \in Z\right\} \cup \left\{\frac{5}{6} + m :\ m \in Z\right\}$$

a rješenja jednadžbe $cos(2\pi x) = -\frac{1}{2}$:

$$x \in \left\{\frac{1}{3} + m\ : m \in Z\right\} \cup \left\{\frac{2}{3} + m :\ m \in Z\right\}$$

Do sada nađena rješenja se mogu zapisati i ovako

$$x \in \left\{\frac{1}{6} + \frac{m}{2}\ : m \in Z\right\} \cup \left\{\frac{1}{3} + \frac{m}{2} :\ m \in Z\right\}.$$

Za $k = 1$ dobivamo jednadžbu $cos^2(2\pi x) = \frac{3}{4}$

Pa vrijedi $cos(2\pi x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ili $cos(2\pi x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Rješenje jednadžbe $cos(2\pi x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ su

$$x \in \left\{\frac{1}{12} + m\ : m \in Z\right\} \cup \left\{\frac{11}{12} + m :\ m \in Z\right\}$$

a rješenja jednadžbe $cos(2\pi x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$x \in \left\{\frac{5}{12} + m\ : m \in Z\right\} \cup \left\{\frac{7}{12} + m :\ m \in Z\right\}$$

Ta rješenja se mogu zapisati i ovako

$$x \in \left\{\frac{1}{12} + \frac{m}{2}\ : m \in Z\right\} \cup \left\{\frac{5}{12} + \frac{m}{2} :\ m \in Z\right\}$$

Skup svih rješenja jednadžbe možemo zapisati još jednostavnije

$$x \in \left\{\frac{1}{12} + \frac{m}{4}\ : m \in Z\right\} \cup \left\{\frac{1}{6} + \frac{m}{4} :\ m \in Z\right\}$$

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Prozor, 24. ožujka 2018..

IV. RAZRED

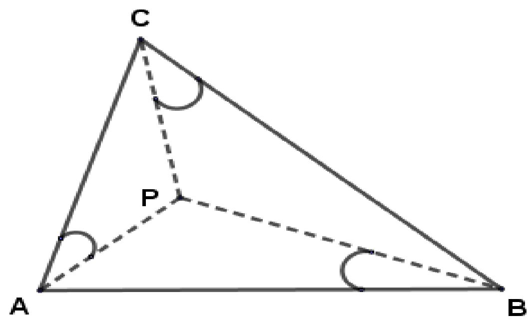
Zadatak 4. **Unutar šiljastokutnog trokuta ABC nalazi se točka P takva da je**

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle CBA + \sphericalangle ACB, \qquad \sphericalangle BPC = \sphericalangle ACB + \sphericalangle BAC.$$

Dokaži da vrijedi

$$\frac{|AC| \cdot |BP|}{|BC|} = \frac{|BC| \cdot |AP|}{|AB|}.$$

RJEŠENJE:



Označimo $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle CBA = \beta$ $\quad i \quad$ $\sphericalangle ACB = \gamma$
Iz $\sphericalangle APB = \beta + \gamma$ $\quad i \quad$ $\sphericalangle BPC = \gamma + \alpha$ **slijedi**

$$\sphericalangle CPA = 360^0 - \sphericalangle APB - \sphericalangle BPC = 360^0 - \beta - \gamma - \gamma - \alpha = \alpha + \beta.$$

Ako je $\sphericalangle PBA = x$, **onda je**
$\sphericalangle BAP = 180^0 - \sphericalangle APB - \sphericalangle PBA = 180^0 - \beta - \gamma - x = \alpha - x$, **te**

$$\sphericalangle PAC = \sphericalangle BAC - \sphericalangle BAP = \alpha - (\alpha - x) = x.$$

Analogno dobijemo $\sphericalangle ACP = \gamma - x$, $\sphericalangle PCB = x$ $\; i \;$ $\sphericalangle CBP = \beta - x$
Primjenom poučka o sinusima u trokutima ABP i BCP **dobivamo**

$$\frac{|AP|}{sinx} = \frac{|AB|}{sin(\beta + \gamma)} = \frac{|AB|}{sin\alpha} \quad i \quad \frac{|BP|}{sinx} = \frac{|BC|}{sin(\gamma + \alpha)} = \frac{|BC|}{sin\beta},$$

odakle zbog $sin\alpha : sin\beta = |BC| : |AC|$ **dobivamo**

$$\frac{|BP|}{|AP|} = \frac{|BC| sin\alpha}{|AB| sin\beta} = \frac{|BC| \cdot |BC|}{|AB| \cdot |AC|},$$

odnosno

$$\frac{|AC| \cdot |BP|}{|BC|} = \frac{|BC| \cdot |AP|}{|AB|}$$

q.e.d.