ZADACI

I. RAZRED

1. Neka je a cijeli broj. Naći sva cjelobrojna rješenja jednadžbe $3|x-1|+a|x-2|=2a+5-x$.

2. Ako je $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, dokazati da je $x^3+y^3+z^3=1$.

3. Sjecištem dijagonala trapeza $ABCD$ položena je paralela osnovici trapeza i ona siječe krak $\overline{AD}$ u točki P, a krak $\overline{BC}$ u točki Q. Ako su duljine osnovica trapeza jednake a i c, kolika je duljina dužine $\overline{PQ}$?

4. Dva natjecatelja uzimaju izmjenično kuglice iz dvije kutije. Svaki natjecatelj, kada dođe na red, može uzeti iz bilo koje, ali samo jedne kutije proizvoljan broj kuglica. Pobjednik je onaj koji posljednji uzme kuglice. Kako treba igrati prvi igrač da pobijedi ako u jednoj kutiji ima 111, a u drugoj 911 kuglica?

II. RAZRED

1. Dan je kvadratni trinom: $f(x)=(a+1)x^2-2(a-1)x+a-5$, (1) pri čemu je a realni parametar.
   a) Dokazati da krivulje $y=f(x)$ za svako a prolaze kroz jednu zajedničku točku. Odrediti koordinate te točke.
   b) Dokazati da ne postoji nijedan trinom (1) čiji je ekstrem u dobivenoj točki pod a).
   c) Naći vezu između nula kvadratnog trinoma (1) koja ne zavisi od realnog parametra a.

2. Koliko rješenja ima jednadžba: $|\log_2|x||=|x^2-4|$.

3. Riješi u skupu realnih brojeva jednadžbu: $\sqrt[4]{x}+\sqrt{25-x}=5$.

4. Dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ trapeza $ABCD$ sijeku se u točki O. Ako su dane površine trokuta ABO i CDO, kolika je površina trapeza?

III. RAZRED

1. **Neka su z i w kompleksni brojevi takvi da vrijedi $|z| = |w| = |z - w|$.**

   Izračunajte $\left(\frac{z}{w}\right)^{1992}$.

2. **Dokaži da za $x > 0$ i $x \neq 1$ vrijedi sljedeća nejednakost:**
$$\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \cdots + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{\log_x^2 2}.$$

3. **Odredi za koje vrijednosti realnog parametra a jednadžba $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0$ ima rješenje.**

4. **U trokutu ABC zadana je težišnica $\overline{AE}$. Točkom D stranice $\overline{BC}$ povuče se usporednica s $\overline{AE}$, koja stranicu $\overline{AB}$ siječe u točki F, a produžetak stranice $\overline{CA}$ u točki G. Dokazati da $|DF| + |DG|$ ne zavisi o izboru točke D.**

IV. RAZRED

1. **Zadan je niz 1,8,22,43,... u kojem razlike susjednih članova čine aritmetički niz 7,14,21,... . I broj 35351 član je prvoga niza.Koji je po redu?**

2. **Odredi za koje vrijednosti realnog parametra a jednadžba: $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0$ ima rješenje.**

3. **Dokaži da za $x > 0$ i $x \neq 1$ vrijedi sljedeća nejednakost:**
$$\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \cdots + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{\log_x^2 2}.$$

4. **U trokutu ABC zadana je težišnica $\overline{AE}$. Točkom D stranice $\overline{BC}$ povuče se usporednica s $\overline{AE}$, koja stranicu $\overline{AB}$ siječe u točki F, a produžetak stranice $\overline{CA}$ u točki G. Dokazati da $|DF| + |DG|$ ne zavisi o izboru točke D.**

R J E Š E NJ A

I. RAZRED

Zadatak 1. $|x-1| = \left\{ \begin{matrix} x-1, x \geq 1 \\ -(x-1), x < 1 \end{matrix} \right\}$, $|x-2| = \left\{ \begin{matrix} x-2, x \geq 2 \\ -(x-2), x < 2 \end{matrix} \right\}$

1^0 **Za** $x<1$ **imamo:** $-3(x-1)-a(x-2)=2a+5-x \Leftrightarrow (-2-a)x=2$

$\Leftrightarrow x=-\frac{2}{a+2}$, $(a \neq -2) \Rightarrow a+2 \mid 2 \Rightarrow a+2 \in \{1,-1,2,-2\} \Rightarrow a \in \{-1,-3,0,-4\}$

$\Rightarrow x \in \{-2,2,-1,1\}$, **tj.** $x \in \{-2,-1\}$, **zbog uvjeta** $x<1$.

2^0 **Za** $x \in [1,2)$ **imamo:** $3(x-1)-a(x-2)=2a+5-x \Leftrightarrow (4-a)x=8$

$\Leftrightarrow x=-\frac{8}{a-4}$ $(a \neq 4) \Rightarrow a-4 \mid 8 \Rightarrow a-4 \in \{1,-1,2,-2,4,-4,8,-8\}$

$\Rightarrow a \in \{5,3,6,2,8,0,12,-4\} \Rightarrow x \in \{-8,8,-4,4,-2,2,-1,1\}$ **tj.** $x=1$ **zbog uvjeta** $x \in [1,2)$.

3^0 **Za** $x \in [2,+\infty) \Rightarrow 3(x-1)+a(x-2)=2a+5-x \Leftrightarrow (a+4)x=4(a+4)-8$

$\Leftrightarrow x=4-\frac{8}{a+4}$, $(a \neq -4) \Rightarrow a+4 \mid 8 \Rightarrow a+4 \in \{1,-1,2,-2,4,-4,8,-8\}$

$\Rightarrow a \in \{-3,-5,-2,-6,0,-8,4,-12\} \Rightarrow x \in \{-4,12,0,8,2,6,3,5\}$ **tj.**

$x \in \{2,3,5,6,8,12\}$ **zbog** $x \in [2,+\infty)$.

Iz ova tri slučaja imamo ukupno devet rješenja: $x \in \{-2,-1,1,2,3,5,6,8,12\}$.

Zadatak 2. **Iz danih uvjeta slijedi da je :** $x+y=1-z$, $\frac{x+y}{xy}=\frac{z-1}{z}$

Pa imamo slijedeća dva slučaja:

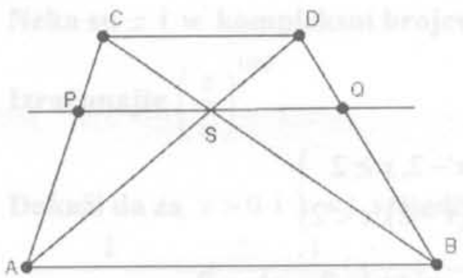
1^0 $x+y=1-z=0$. **Tada je** $x^3+y^3+z^3=x^3+(-x)^3+1=1$.

2^0 $z \neq 1$. **Tada je** $x+y=1-z$, $xy=-z$, **odakle oduzimanjem dobivamo**

$x+y-xy=1 \Leftrightarrow (x-1)(1-y)=0$. **Odavde slijedi da je** $x=1$ **ili** $y=1$,

pa je opet $x^3+y^3+z^3=1$.

Zadatak 3.



Iz $\Delta ASP \sim \Delta ACD \Rightarrow |PS| : |CD| = |AP| : |AD|$, a iz

$\Delta ABD \sim \Delta PSD \Rightarrow |PS| : |AB| = |PD| : |AD| = (|AD| - |AP|) : |AD|$.

Zbrajanjem ovih dviju jednakosti dobijemo $\frac{|PS|}{|CD|} + \frac{|PS|}{|AB|} = 1$,

a odatle je $|PS| = \frac{ac}{a+c}$.

Tako je konačno $|PQ| = 2 \cdot |PS| = \frac{2ac}{a+c}$.

Zadatak 4.

Prvi natjecatelj treba iz kutije s 911 kuglica uzeti 800 kuglica. Na taj način, kada drugi natjecatelj dođe na red, u obje kutije se nalazi 111 kuglica. Nakon što drugi natjecatelj uzme određen broj kuglica iz jedne (i samo jedne) od kutija, prvi natjecatelj uzima isti broj kuglica, ali iz suprotne kutije. Na taj način, kada god je drugi natjecatelj na redu, u obje kutije se nalazi isti broj kuglica. Takvom taktikom će prvi natjecatelj sigurno pobijediti, jer dok god drugi natjecatelj može iz jedne od kutija uzeti bar jednu kuglicu, to isto može uraditi i prvi natjecatelj, ali iz preostale kutije. Dakle, ne može se desiti da prvi natjecatelj ostane bez kuglica prije drugog natjecatelja.

II. RAZRED

Zadatak 1.

a) Imamo iz (1): $f(x)=a(x^2-2x+1)+(x^2+2x-5)$. Ako je $x=1$, onda je $f(x)=-2$.
Dakle, sve krivulje $y=f(x)$ prolaze točkom $M(1,-2)$.

b) Ekstrem trinoma (1) nalazi se u točki $T(x_0,y_0)$, pri čemu je $x_0=-\frac{b}{2a}=\cdots=\frac{a-1}{a+1}$ i $y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}=\cdots=\frac{-2(a+3)}{a+1}$.

Da bi se tjeme parabole nalazilo u točki $M(1,-2)$ mora biti $\frac{a-1}{a+1}=1$, tj. $a-1=a+1$, a ovo ne može biti ni za jednu vrijednost parametra a.

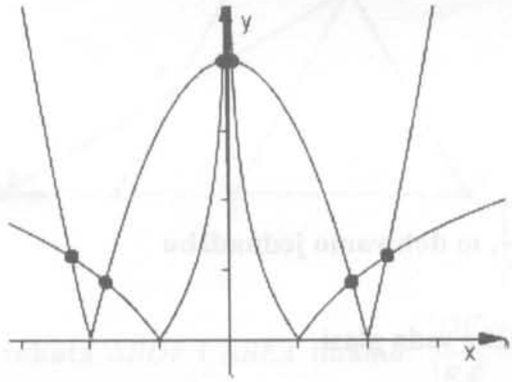
c) Prema Vietovim pravilima vrijedi $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{2(a-1)}{a+1}$ i $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{a-5}{a+1}$.

Iz druge jednadžbe nalazimo $a=\frac{5+x_1\cdot x_2}{1-x_1\cdot x_2}$. Uvrštavanjem u prvu jednadžbu i nakon sređivanja dobije se $3(x_1+x_2)-2x_1\cdot x_2=4$.

Zadatak 2.

Riječ je o pitanju za koje $x\in R$ vrijedi $f(x)=g(x)$, pri čemu je $f(x)=\left|\log_2|x|\right|$ te $g(x)=|x^2-4|$.

Kako se traži broj rješenja, zadatak ćemo riješiti grafički.

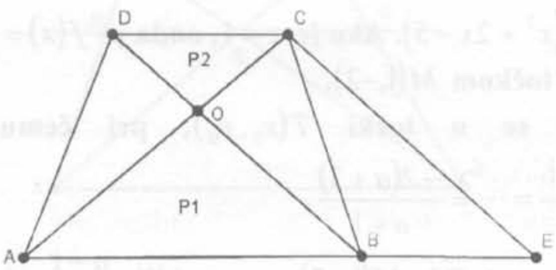


Jednadžba ima ukupno šest rješenja

Zadatak 3.

Uvedimo smjenu $\sqrt[4]{x}=t$ dobivamo jednadžbu $t+\sqrt{25-t^4}=5$, pri čemu je $0\le t\le\sqrt{5}$.
Ova jednadžba je ekvivalentna redom sa sljedećim jednadžbama:
$\sqrt{25-t^4}=5-t \Leftrightarrow 25-t^4=25-10t+t^2 \Leftrightarrow t\cdot(t^3+t-10)=0 \Leftrightarrow t\cdot(t-2)\cdot(t^2+2t+5)=0$.
Pošto rješenja jednadžbe $t^2+2t+5=0$ nisu realna, slijedi da je $t\in\{0,2\}$,
tj. da je skup rješenja dane jednadžbe $x\in\{0,16\}$.

Zadatak 4.



Vrhom C trapeza povucimo paralelu s pravcem BD. Tako dobijemo trokut ΔAEC jednake površine kao što je površina trapeza $ABCD$. Nadalje, $\Delta AEC \sim \Delta ABO$, zbog čega je $\frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}} = \frac{v_1}{v_1 + v_2}$. A zbog $\Delta AEC \sim \Delta CDO$ je $\frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P}} = \frac{v_2}{v_1 + v_2}$. Pri tom je v_1 visina ΔABO, a v_2 visina ΔCDO. I sada je:

$\frac{\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2}}{\sqrt{P}} = \frac{v_1 + v_2}{v_1 + v_2} = 1$. Dakle je $P = \left(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2}\right)^2$.

III. RAZRED

Zadatak 1.

Podijelimo jednakost s $|w|$. Kako vrijedi $\frac{|z|}{|w|} = \left|\frac{z}{w}\right|$, to dobivamo jednadžbu

$\left|\frac{z}{w}\right| = \left|\frac{z}{w} - 1\right| = 1$. Uvedimo smjenu $u = \frac{z}{w}$. Jednadžba sada glasi

$|u| = |u - 1| = 1 \Rightarrow |u|^2 = |u - 1|^2 = 1$. Kako je $|u|^2 = u \cdot \overline{u}$, to dobivamo:

$u \cdot \overline{u} = (u - 1)(\overline{u} - 1) = 1 \Rightarrow u \cdot \overline{u} = u \cdot \overline{u} - u - \overline{u} + 1 = 1$ (1) i odavde $\overline{u} = 1 - u$ što uvršteno u jednakost (1) daje $u \cdot (1 - u) = 1$ tj. $u^2 - u + 1 = 0$ (2).

Množenjem relacije (2) s $u + 1 \neq 0$ dobivamo $u^3 = -1$ pa je $\left|\frac{z}{w}\right|^{1992} = u^{1992} = \left(u^3\right)^{664} = 1$.

Zadatak 2.

Lijevu stranu jednakosti možemo ovako zapisati:

$$\frac{1}{\log_x^2 2}\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}\right) = \frac{1}{\log_x^2 2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{\log_x^2 2}.$$

Zadatak 3.

Imamo da je: $\sin^4 x+\cos^4 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x=1-\frac{(\sin 2x)^2}{2}$.

Koristeći ovu jednakost, dana jednakost se svodi na jednadžbu

$1-\frac{(\sin 2x)^2}{2}+\sin 2x+a=0$, **stavimo** $\sin 2x=t$ **pa imamo**

$2-t^2+2t+2a=0 \Leftrightarrow 3+2a=t^2-2t+1 \Leftrightarrow 3+2a=(1-t)^2 \Rightarrow \sqrt{3+2a}=1-t$ **(otpada mogućnost** $-\sqrt{3+2a}=1-t$ **jer je** $|t|\leq 1$**, pa je** $1-t\geq 0$**)** $\Rightarrow t=1-\sqrt{3+2a}$.

Jasno, mora biti $3+2a\geq 0$ **tj.** $a\geq -\frac{3}{2}$.

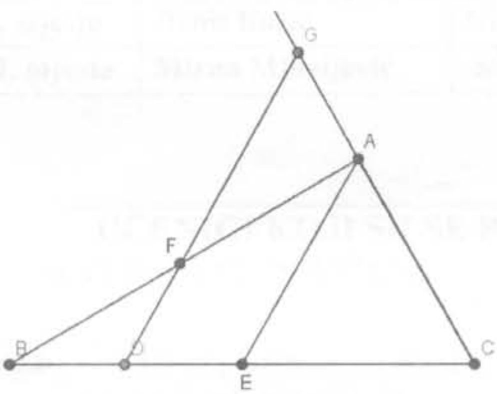
Zbog $\sin 2x=t$ **mora biti** $-1\leq 1-\sqrt{3+2a}\leq 1$.

Desna nejednakost je točna za sve $a\geq -\frac{3}{2}$.

Lijeva nejednakost se svodi na : $\sqrt{3+2a}\leq 2 \Leftrightarrow 3+2a\leq 4 \Leftrightarrow 2a\leq 1 \Leftrightarrow a\leq \frac{1}{2}$.

Konačno zaključujemo da jednadžba ima rješenje ako je $a\in\left[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right]$.

Zadatak 4.



Iz trokuta ΔBDF **i** ΔBEA **imamo:** $\frac{|DF|}{|EA|}=\frac{|BD|}{|BE|}$ (1)

Iz trokuta ΔCED **i** ΔCAE **imamo:** $\frac{|DG|}{|EA|}=\frac{|DC|}{|EC|}=\frac{|DC|}{|BE|}$. (2)

Zbrajanjem (1) **i** (2) **dobijemo:** $\frac{|DF|+|DG|}{|EA|}=\frac{|BD|+|DC|}{|BE|}$ **odakle slijedi**

$|DF|+|DG|=|EA|\cdot\frac{|BC|}{|BE|}=2\cdot|EA|$, **tj.** $|DF|+|DG|=2\cdot|EA|$.

Dakle, zbog $|DF|+|DG|$ **jednak je dvostrukoj duljini težišnice** $|EA|$ **i ne ovisi o izboru točke** D.

IV. RAZRED

Zadatak 1.

Odredimo opći član prvog niza. Ispišimo niz jednakosti

$$a_2 - a_1 = 7$$
$$a_3 - a_2 = 14 = 2 \cdot 7$$
$$a_4 - a_3 = 21 = 3 \cdot 7$$
$$\ldots\ldots$$
$$a_n - a_{n-1} = (n-1) \cdot 7$$

Sve te jednakosti zbrojimo, te imamo:

$$a_n - a_1 = 7 + 14 + 21 + \cdots + (n-1) \cdot 7 =$$
$$= 7[1 + 2 + \cdots + (n-1)] = 7 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

Te je s $a_n = 1 + \frac{7}{2} n(n-1)$ **dan opći član prvog niza.**

Uvrstimo li tu $a_n = 35351$ **dobit ćemo jednadžbu** $n^2 - n - 10100 = 0$ **s pozitivnim rješenjem** $n = 101$.

Zadatak 2.

Isti kao 3. zadatak za treći razred.

Zadatak 3.

Isti kao 2. zadatak za treći razred.

Zadatak 4.

Isti kao 4. zadatak za treći razred.

ZADATKE PRIPREMIO

Za I. II. III. i IV. razred .... NIKO SUŠAC, prof.

NATJECATELJSKA KOMISIJA- SŠ

1. NIKO SUŠAC, prof.
2. ANITA MARIJANOVIĆ, prof.
3. ZORA SPAJIĆ, prof.

REZULTATI NATJECANJA IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA FEDERACIJE BIH

	I razred	Škola	Mjesto
I. mjesto	Ajna Ibrahimkadić	MSŠ „Stjepan Radić“	Žabljak-Usora
II. mjesto	Irma Hadžić	KŠC „Sveti Franjo“	Tuzla
III. mjesto	Nikola Mandić	Gimnazija fra Grge Martića	Mostar
	II razred		
I. mjesto	Mladen Pejić	KŠC „Sveti Franjo“	Tuzla
II. mjesto	Ivan Bartulović	Franjevačka klasična gimnazija	Visoko
III. mjesto	Anđela Mandić	Gim. fra Dominika Mandića	Široki Brijeg
	III razred		
I. mjesto	Lucija Lovrić	Gim. fra Dominika Mandića	Široki Brijeg
II. mjesto	Denis Čuljak	Gimnazija fra Grge Martića	Mostar
III. mjesto	Robert Matičević	KŠC „Sveti Franjo“	Tuzla
	IV razred		
I. mjesto	Mate Maras	Gim. fra Dominika Mandića	Široki Brijeg
II. mjesto	Denis Božić	Gimnazija Mostar	Mostar
III. mjesto	Mirna Mihaljević	SŠ Kupres	Kupres

UČENICI KOJI SU SE PLASIRALI NA NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA NA RAZINI BIH

Red.br	Ime i ptezime	Razred	Škola	Mjesto
1.	Ajna Ibrahimkadić	I.	MSŠ „Stjepan Radić“	Žabljak-Usora
2.	Mladen Pejić	II.	KŠC „Sveti Franjo“	Tuzla
3.	Lucija Lovrić	III.	Gim. fra Dominika Mandića	Široki Brijeg
4.	Denis Čuljak	III.	Gimnazija fra Grge Martića	Mostar
5.	Robert Matičević	III.	KŠC „Sveti Franjo“	Tuzla
6.	Mate Maras	IV.	Gim. fra Dominika Mandića	Široki Brijeg
7.	Denis Božić	IV.	Gimnazija Mostar	Mostar
8.	Mirna Mihaljević	IV.	SŠ Kupres	Kupres