UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Stolac, 19. ožujka 2016.

I. RAZRED

Zadatak 1. **Grafički predstavi funkciju** $y = x - \sqrt{x^2} + \frac{x-1}{|x-1|}$.

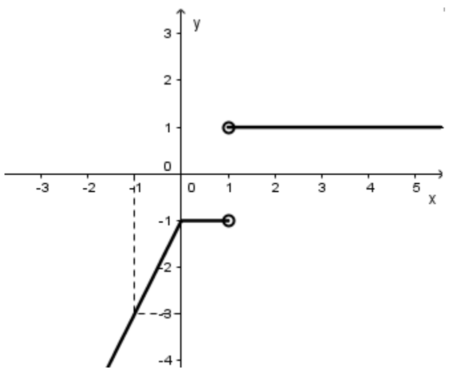
RJEŠENJE

$y = x - |x| + \frac{x-1}{|x-1|}$, $\quad |x| = \begin{cases} x & za\ x \geq 0 \\ -x & za\ x < 0 \end{cases}$, $|x-1| = \begin{cases} x-1 & za\ x \geq 1 \\ -x+1 & za\ x < 1 \end{cases}$

1^0 **Za** $x \in (-\infty, 0)$ **, imamo** $y = 2x - 1$

2^0 **Za** $x \in [0, 1)$, **imamo** $y = -1$,

3^0 **Za** $x \in (1, +\infty)$ **imamo** $y = 1$



q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Stolac, 19. ožujka 2016.

I. RAZRED

Zadatak 2. **Neka su $a,\ b,\ c$ realni brojevi koji nisu svi jednaki, takvi da vrijedi**

$$a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$$

Dokaži da je $a+\frac{1}{b}=-abc$.

RJEŠENJE

Neka je $p=a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$. Treba dokazati da je $p=-abc$.
Množenjem ovih jednakosti s $a,\ b,\ c$ redom, dobivamo

$$ab+1=pb,\quad bc+1=pc,\quad ca+1=pa$$

a njihovim oduzimanjem jednakosti:

$$b(a-c)=p(b-c),\ \ c(b-a)=p(c-a),\quad a(c-b)=p(a-b)$$

Množenjem ovih triju jednakosti dobivamo

$$abc(a-c)(b-a)(c-b)=p^3(b-c)(c-a)(a-b)\qquad(1)$$

Iz danih jednakosti dobivamo

$$a-b=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{b-c}{bc}$$

$$b-c=\frac{1}{a}-\frac{1}{c}=\frac{c-a}{ca}$$

$$c-a=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}$$

te množenjem $$(a-b)(b-c)(c-a)=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(abc)^2}\qquad(2)$$

ako bi dva od brojeva $a,\ b,\ c$ bili jednaki, bili bi jednaki sva tri. Zaključujemo da su dani brojevi međusobno različiti, tj $(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$
sada iz (2) dobivamo $abc=\pm 1$
Iz (1) je $p^3=-abc$, tj. $p^3=\mp 1$, pa zaključujemo $p=\mp 1$, te konačno $p=-abc$.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Stolac, 19. ožujka 2016.

I. RAZRED

Zadatak 3. Nađite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$4x + y + 4\sqrt{xy} - 28\sqrt{x} - 14\sqrt{y} + 48 = 0.$$

RJEŠENJE

Danu jednadžbu možemo napisati u obliku

$$4x + y + 49 + 4\sqrt{xy} - 28\sqrt{x} - 14\sqrt{y} = 1$$

odnosno

$$\left(2\sqrt{x} + \sqrt{y} - 7\right)^2 = 1$$

Odavde slijedi $2\sqrt{x} + \sqrt{y} - 7 = \pm 1$.

1^0 $2\sqrt{x} + \sqrt{y} - 7 = 1$ **slijedi** $\sqrt{y} = 8 - 2\sqrt{x}$,

$\sqrt{y} \geq 0$ **slijedi** $8 - 2\sqrt{x} \geq 0$ **tj.** $\sqrt{x} \leq 4$ **što daje**

$x \in \{0, 1, 4, 9, 19\}$ **i** $y \in \{64, 36, 16, 4, 0\}$

2^0 $2\sqrt{x} + \sqrt{y} - 7 = -1$ **slijedi** $\sqrt{y} = 6 - 2\sqrt{x}$,

$\sqrt{y} \geq 0$ **slijedi** $6 - 2\sqrt{x} \geq 0$ **tj.** $\sqrt{x} \leq 3$ **što daje**

$x \in \{0, 1, 4, 9\}$ **i** $y \in \{36, 16, 4, 0\}$

Dakle, rješenja su sadržana u skupu

$$(x, y) \in \{(0, 64), (1, 36), (4, 16), (9, 4), (16, 0), (0, 36), (1, 16), (4, 4), (9, 0)\}$$

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Stolac, 19. ožujka 2016.

I. RAZRED

Zadatak 4. **Duljine stranica trokuta su $a = b - \frac{r}{2}$, b, $c = b + \frac{r}{2}$, gdje je r polumjer tom trokutu upisane kružnice. Izrazite duljine stranica trokuta u zavisnosti od r.**

RJEŠENJE

Neka je $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3}{2}b$ iz formula za površinu trokuta dobivamo

$$\mathrm{sr} = \mathrm{P} = \sqrt{\mathrm{s}(\mathrm{s}-\mathrm{a})(\mathrm{s}-\mathrm{b})(\mathrm{s}-\mathrm{c})}$$

Pa uvrštavanjem gornjih izraza za a, b, c slijedi

$$sr^2 = (s-a)(s-b)(s-c)$$

$$\frac{3}{2}br^2 = \left(\frac{b}{2} + \frac{1}{4}r\right)\frac{b}{2}\left(\frac{b}{2} - \frac{1}{4}r\right)$$

$$b^2 = \frac{49}{4}r^2$$

$$b = \frac{7}{2}r$$

Konačno imamo

$$b = \frac{7}{2}r, \quad a = \frac{13}{4}r \quad \text{i} \quad c = \frac{15}{4}r \,.$$

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Stolac, 19. ožujka 2016.

II. RAZRED

Zadatak 1.

Dokazati da za sva tri prirodna broja a, b, c vrijedi nejednakost

$$a^{\frac{a}{a+b+c}}\, b^{\frac{b}{a+b+c}}\, c^{\frac{c}{a+b+c}} \geq \frac{1}{3}(a+b+c).$$

RJEŠENJE

Veza između geometrijske i harmoniske sredine je nejednakost

$$G(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq H(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

gdje su $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitivni realni brojevi i

$$G(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

$$H(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}}.$$

Iz navedenog slijedi

$$G(\underbrace{a \dots a}_{a}, \underbrace{b \dots b}_{b}, \underbrace{c \dots c}_{c}) \geq H\left(\underbrace{a \dots a}_{a}, \underbrace{b \dots b}_{b}, \underbrace{c \dots c}_{c}\right).$$

Odnosno

$$\sqrt[a+b+c]{a^a \cdot b^b \cdot c^c} \geq \frac{a+b+c}{\underbrace{\frac{1}{a}+\dots+\frac{1}{a}}_{a}+\underbrace{\frac{1}{b}+\dots+\frac{1}{b}}_{b}+\underbrace{\frac{1}{c}+\dots+\frac{1}{c}}_{c}},$$

$$a^{\frac{a}{a+b+c}}\, b^{\frac{a}{a+b+c}}\, c^{\frac{a}{a+b+c}} \geq \frac{a+b+c}{a\cdot\frac{1}{a}+b\cdot\frac{1}{b}+c\cdot\frac{1}{c}} = \frac{1}{3}(a+b+c)\,.$$

Jednakost vrijedi za $a = b = c$.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Stolac, 19. ožujka 2016.

II. RAZRED

Zadatak 2. Odredite sve šiljaste kutove pravokutnog trokuta kojemu se polumjeri opisane i upisane kružnice odnose kao 5 : 2.

RJEŠENJE
Iz formula sa polumjer upisane i opisane kružnice, te površinu pravokutnog trokuta dobijemo:

$$\frac{2}{5}=\frac{\rho}{r}=\frac{\frac{P}{s}}{\frac{c}{2}}=\frac{\frac{ab}{a+b+c}}{\frac{c}{2}}=\frac{\frac{c\,sin\alpha\cdot c\,cos\alpha}{c\,sin\alpha+c\,cos\alpha+c}}{\frac{c}{2}}=\frac{2\,sin\alpha\,cos\alpha}{sin\alpha+cos\alpha+1}$$

Dakle slijedi da je

$$5\,sin\alpha\,cos\alpha=sin\alpha+cos\alpha+1.$$

Ako stavimo da je $x=sin\alpha$ **,** $y=cos\alpha$ **, dobivamo sustav**

$$\begin{cases}5xy=x+y+1\\ x^2+y^2=1\end{cases}.$$

Neka je $x+y=u$**,** $xy=v$ **. Sada imamo**

$$\begin{cases}5v=u+1\\ u^2-2v=1\end{cases}.$$

Iz prve jednadžbe je $u=5v-1$ **, pa uvrštavanjem u drugu slijedi** $25v^2-12v=0$ **, odakle je** $v_1=0$ **,** $u_1=-1$ **;** $v_2=\frac{12}{25}$**,** $u_2=\frac{7}{5}$ **.**

Budući da je $u=sin\alpha+cos\alpha>0$**, uzimamo u razmatranje samo drugo rješenje. Dakle, imamo sustav**

$$\begin{cases}x+y=\frac{7}{5}\\ xy=\frac{12}{25}\end{cases},$$

čija su rješenja $x_1=\frac{3}{5}$**,** $y_1=\frac{4}{5}$ **;** $x_2=\frac{4}{5}$**,** $y_2=\frac{3}{5}$ **.**

Prema tome, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$**,** $\sin\beta=\frac{4}{5}$ **ili** $\sin\alpha=\frac{4}{5}$**,** $\sin\beta=\frac{3}{5}$ **.**
Dakle šiljasti kutovi danog trokuta su $\arcsin\frac{3}{5}=36°52'$ **i** $\arcsin\frac{4}{5}=53°8'$ **.**

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Stolac, 19. ožujka 2016.

II. RAZRED

Zadatak 3. **U skupu realnih brojeva riješi sustav jednadžbi**

$$\begin{cases} x^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}} = y^2 \cdot \sqrt[3]{y^2} \\ y^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}} = \sqrt[3]{x^2} \end{cases}$$

RJEŠENJE

Očito je jedno rješenje jednadžbe je $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathbf{1}, \mathbf{1})$. Razmotrimo sada slučaj za $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{1}$ i $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{1}$.

Logaritmiramo sustav uz uvjet $x > 0$ i $y > 0$, te dobijemo

$$\begin{cases} \left(\sqrt[4]{x} + \sqrt{y}\right) \cdot \log x = \frac{8}{3} \log y \\ \left(\sqrt[4]{x} + \sqrt{y}\right) \cdot \log y = \frac{2}{3} \log x \end{cases},$$

odnosno

$$\begin{cases} \left(\sqrt[4]{x} + \sqrt{y}\right) = \frac{8 \log y}{3 \log x} \\ \left(\sqrt[4]{x} + \sqrt{y}\right) = \frac{2 \log x}{3 \log y} \end{cases}.$$

Iz prethodnog sustava metodom komparacije slijedi

$$\frac{8 \log y}{3 \log x} = \frac{2 \log x}{3 \log y},$$

$$4 \log^2 y = \log^2 x,$$

što daje

$$2 \log y = \log x \quad \textbf{ili} \quad 2 \log y = -\log x\ .$$

Drugi slučaj nema rješenja, jer nije moguće da je $\sqrt[4]{x} + \sqrt{y} < 0$.

Iz prvog slučaja dobijemo $x = y^2 \to 2\sqrt{y} = \frac{4}{3}$, što daje $(x, y) = \left(\frac{16}{81}, \frac{4}{9}\right)$.

Znači, sustav ima dva rješenja $\left(\frac{16}{81}, \frac{4}{9}\right)$ i $(1,1)$.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Stolac, 19. ožujka 2016.

II. RAZRED

Zadatak 4. **Paralelno stranicama jednakostraničnog trokuta povučeni su pravci koji dijele taj trokut na tri sukladna romba, tri sukladna trapeza i jedan jednakostranični trokut u sredini. Ako je površina tog dobivenog trokuta dvostruko veća od površine pojedinog romba, koliki je udio površine jednog trapeza u površini polaznog trokuta?**

RJEŠENJE

Označimo točke kao na slici.

Da bi likovi $AC_1A_0B_2$, $BA_1B_0C_2$, $CB_1C_0A_2$ bili rombovi, mora biti

$$|AC_1| = |C_2B| = |BA_1| = |A_2C| = |CB_1| = |B_2A|$$

Neka je $|AC_1| = x$. Površina romba jednaka je dvostrukoj površini jednakostraničnog trokuta stranice duljine x.

Tada je, prema uvjetu zadatka, površina jednakostraničnog trokuta $A_0B_0C_0$ jednaka četverostrukoj površini takvog trokuta. Iz ovog zaključujemo da je duljina stranice trokuta $A_0B_0C_0$ jednaka 2x. Dakle, $|A_0B_0| = 2x$.
Kutovi uz osnovicu $\overline{C_1C_2}$ jednakokračnog trapeza $C_1C_2B_0A_0$ iznose 60°, duljina kraka tog trapeza je x, a duljina kraće osnovice 2x. Stoga se taj trapez može rastaviti na paralelogram i jednakostranični trokut (odnosno na 5 jednakostraničnih trokuta stranice duljine x). Dakle, duljina osnovice tog trapeza $\overline{C_1C_2}$ = 3x, a duljina stranice polaznog trokuta $|AB| = 5x$.
Površina trokuta ABC je 25 puta veća od površine jednakostraničnog trokuta stranice duljine x.
Površina pojedinog trapeza jednaka je peterostrukoj površini jednakostraničnog trokuta stranice duljine x.
Stoga udio površine trapeza u ukupnoj površini iznosi 1/5, odnosno 20%.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Stolac, 19. ožujka 2016.

.

III. RAZRED

Zadatak 1. Dokaži da nejednakost

$$\left|\sqrt{1+\sin 2x}\right| - \left|\sqrt{1-\sin 2x}\right| \leq \sqrt{2} \quad \text{vrijedi za sve realne brojeve } x .$$

RJEŠENJE:

Kako je $1 + sin2x = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = (\sin x + \cos x)^2$
$1 - sin2x = (sinx - cosx)^2$
Nejednakost prelazi u $\big||sinx + cosx| - |sinx - cosx|\big| \leq \sqrt{2}$. (1)
Izraz s lijeve strane je jednak $2|sinx|$ ili $2|cosx|$. zbog periodičnosti $sinx$ i $cosx$ dovoljno je promatrati $x \in [0, 2\pi]$. Moramo promatrati sljedeća četiri slučaja
1^0 Za $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$ vrijedi $|sinx| < \frac{\sqrt{2}}{2} < cosx$, pa je $sinx + cosx > 0$ i $sinx - cosx < 0$, te (1) postaje $2|sinx| \leq \sqrt{2}$ tj.

$$|sinx| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Što je zadovoljeno za svaki broj x iz promatranog intervala.
2^0 Za $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ vrijedi $|cosx| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \leq sinx$, pa je $sinx + cosx \geq 0$ i $sinx - cosx \geq 0$, i (1) postaje

$$|cosx| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Što je zadovoljeno za svaki broj x iz promatranog intervala.
3^0 Za $x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ vrijedi $|sinx| < \frac{\sqrt{2}}{2} < -cosx$, pa je $sinx + cosx < 0$ i $sinx - cosx > 0$ i (1) postaje

$$|sinx| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Što je zadovoljeno za svaki broj x iz promatranog intervala
4^0 Za $x \in \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ vrijedi $|cosx| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \leq -sinx$, pa je $sinx + cosx \leq 0$ i $sinx - cosx \leq 0$ i (1) postaje

$$|cosx| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Što je zadovoljeno za svaki broj x iz promatranog intervala.
Dakle, nejednakost je zadovoljena za $\forall x \in [0, 2\pi]$ pa i za svako $x \in R$.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Stolac, 19. ožujka 2016.
.

III. RAZRED

Zadatak 2 Odredite kutove α i β pravokutnog trokuta ako vrijedi

$$tg\alpha + tg\beta + tg^2\alpha + tg^2\beta + tg^3\alpha + tg^3\beta = 70.$$

Napomena: Dovoljno je odrediti $tg\alpha$ i $tg\beta$.

RJEŠENJE:

Stavimo li $tg\alpha = x$, tada je $tg\beta = tg(90^0 - \alpha) = ctg\alpha = \frac{1}{x}$, pa je

$$x + \frac{1}{x} + x^2 + \frac{1}{x^2} + x^3 + \frac{1}{x^3} = 70\ .$$

Uz supstituciju $x + \frac{1}{x} = y$ dobivamo

$y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$ tj $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ i

$y^3 = x^3 + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ tj. $x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y$.

Sada imamo

$y + (y^2 - 2) + (y^3 - 3y) = 70$ tj.

$$y^3 + y^2 - 2y - 72 = 0$$

$$y^2(y-4) + 5y(y-4) + 18(y-4) = 0$$

$(y-4)(y^2 + 5y + 18) = 0$, $\qquad (y^2 + 5y + 18 > 0,\ za\ \forall x \in R)$

Slijedi $\quad y - 4 = 0$

$$x + \frac{1}{x} = 4$$
$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Konačno, $tg\alpha = 2 \pm \sqrt{3}$, $tg\beta = \frac{1}{tg\alpha}$

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

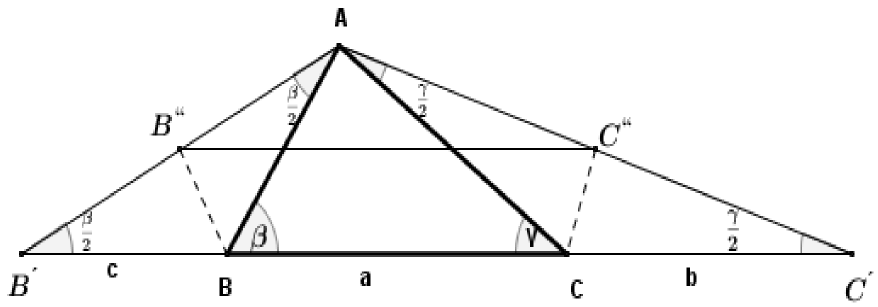
NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Stolac, 19. ožujka 2016.
.

III. RAZRED

Zadatak 3. **Dokažite da u trokutu ΔABC s duljinama stranica a, b, c, kutovima α, β, γ i poluopsegom s vrijedi jednakost**

$$s^2 = b^2 cos^2 \frac{\gamma}{2} + c^2 cos^2 \frac{\beta}{2} + 2bc \cdot cos\frac{\beta}{2} cos\frac{\gamma}{2} cos\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

RJEŠENJE:
Produžimo stranicuBC preko vrhova B i C do točaka $B^/$ i $C^/$ tako da je $|BB^/| = |AB| = c$, $|CC^/| = |AC| = b$. Tada su trokuti $\Delta AB^/B$ i $\Delta AC^/C$ jednakokračni, pa kut pri vrhu $B^/$ iznosi $\frac{\beta}{2}$, a kut pri vrhu $C^/$ iznosi $\frac{\gamma}{2}$.
Neka su $B^{"}, C^{"}$ polovišta dužina $\overline{AB^/}, \overline{AC^/}$.



Lako se vidi da trokut $\Delta AB^{"}C^{"}$ ima duljine stranica
$|AB^{"}| = c\ cos\frac{\beta}{2}$, $|AC^{"}| = b\ cos\frac{\gamma}{2}$, $|B^{"}C^{"}| = s$

i kut pri vrhu A jednak

$$\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \pi - \frac{\beta+\gamma}{2}$$

Zato je tražena jednakost upravo kosinusov poučak za stranicu $B"C"$

$s^2 = b^2 cos^2 \frac{\gamma}{2} + c^2 cos^2 \frac{\beta}{2} - 2bc \cdot cos\frac{\beta}{2} cos\frac{\gamma}{2} cos\left(\pi - \frac{\beta+\gamma}{2}\right)$, **odnosno**

$$s^2 = b^2 cos^2 \frac{\gamma}{2} + c^2 cos^2 \frac{\beta}{2} + 2bc \cdot cos\frac{\beta}{2} cos\frac{\gamma}{2} cos\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH

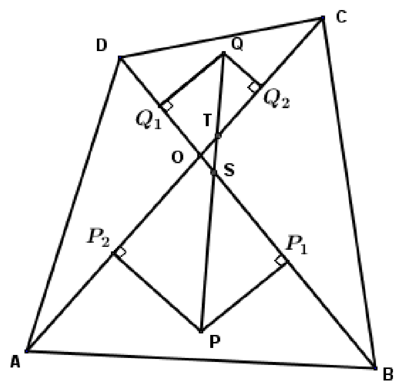
Stolac, 19. ožujka 2016.

III. RAZRED

Zadatak 4 Neka je O točka presjeka dijagonala konveksnog četverokuta $ABCD$, a točke P i Q su središta opisanih kružnica oko trokutova ΔAOB i ΔCOD, redom.

Dokazati da vrijedi nejednakost $|PQ| \geq \frac{|AB|+|CD|}{4}$.

RJEŠENJE:



Neka su P_1, Q_1, P_2, Q_2 polovišta dužina $\overline{OB}$, $\overline{OD}$, $\overline{OA}$, $\overline{OC}$ redom. Tada je

$$|PQ| \geq |P_1S| + |Q_1S| = |P_1Q_1| \quad \text{tj.}$$

$$|PQ| \geq \frac{|BD|}{2} \qquad (1)$$

$$|PQ| \geq |P_2T| + |Q_2T| = |P_2Q_2| \quad \text{tj.}$$

$$|PQ| \geq \frac{|AC|}{2} \qquad (2)$$

Nakon zbrajanja (1) i (2) imamo

$$2|PQ| \geq \frac{|BD|+|AC|}{2} \quad \text{tj.}$$

$$|PQ| \geq \frac{|OB|+|OD|+|OA|+|OC|}{4}$$

$$|PQ| \geq \frac{[(|OB|+|OA|)+(|OC|+|OD|)]}{4} \qquad (3)$$

No, kako je $|OB||OA| > |AB|$ i $|OC|+|OD| > |CD|$ to slijedi iz (3)

$$|PQ| \geq \frac{|AB|+|CD|}{4}.$$

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Stolac, 19. ožujka 2016.

.

IV. RAZRED

Zadatak 1. Ako pozitivni brojevi $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ čine aritmetički niz dokazati da je:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}} .$$

RJEŠENJE:

Kako $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ čine aritmetički niz vrijede jednakosti

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_n-a_{n-1}=d$$

Imamo $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}=\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}\cdot\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{a_2-a_1}=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{d}$, Analogno se dobiva:

$$\frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_2}}=\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{d}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_4}+\sqrt{a_3}}=\frac{\sqrt{a_4}-\sqrt{a_3}}{d}$$

.
.
.

$$\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n-1}}}=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{d}$$

Zbrajanjem dobivenih jednakosti dobivamo

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d}=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d}\cdot\frac{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}=$$

$$=\frac{a_n-a_1}{d\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}\right)}=\frac{a_1+(n-1)d-a_1}{d\left(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}\right)}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}} .$$

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH

IV. RAZRED

Zadatak 2. **Odredi sve vrijednosti realnog parametra p za koje jednadžba $log_3(9^x + 9p^2) = x$ ima dva različita rješenja.**

RJEŠENJE:

Dana jednadžba prelazi u ekvivalentan oblik

$$9^x + 9p^2 = 3^x$$

Supstitucijom $y = 3^x > 0$ dobivamo kvadratnu jednadžbu $y^2 - y + 9p^2 = 0$, čija rješenja su

$$y_1 = \frac{1-\sqrt{1-36p^2}}{2}, \; y_2 = \frac{1+\sqrt{1-36p^2}}{2}$$

Da bi rješenja bila realna i različita, mora njezina diskriminanta $D = 1 - 36p^2$ biti pozitivna, tj. $-\frac{1}{6} < p < \frac{1}{6}$

Očito je $y_2 > 0$. Da bi bilo $y_1 > 0$ treba biti $p \neq 0$.

Dakle, za svako $p \in \left(-\frac{1}{6}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{6}\right)$ polazna jednadžba ima dva različita rješenja.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Stolac, 19. ožujka 2016.

.

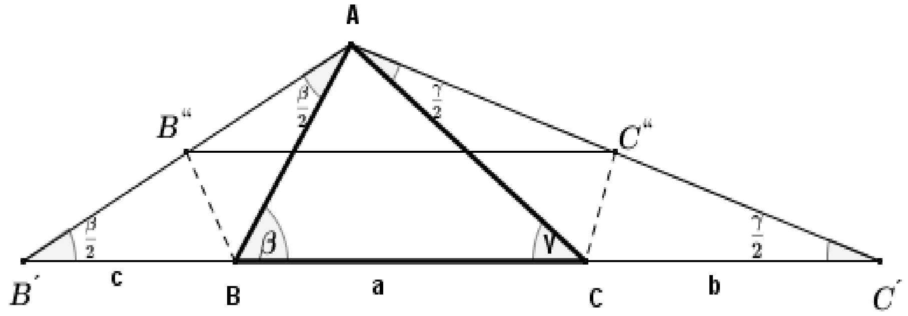
IV. RAZRED

Zadatak 3. **Dokažite da u trokutu ΔABC s duljinama stranica a, b, c, kutovima α, β, γ i poluopsegom s vrijedi jednakost**

$$s^2 = b^2 cos^2\frac{\gamma}{2} + c^2 cos^2\frac{\beta}{2} + 2bc \cdot cos\frac{\beta}{2} cos\frac{\gamma}{2} cos\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

RJEŠENJE:

Produžimo stranicuBC preko vrhova B i C do točaka B' i C' tako da je $|BB'| = |AB| = c$, $|CC'| = |AC| = b$. Tada su trokuti $\Delta AB'B$ i $\Delta AC'C$ jednakokračni, pa kut pri vrhu B' iznosi $\frac{\beta}{2}$, a kut pri vrhu C' iznosi $\frac{\gamma}{2}$.
Neka su B'', C'' polovišta dužina $\overline{AB'}$, $\overline{AC'}$.



Lako se vidi da trokut $\Delta AB''C''$ ima duljine stranica
$|AB''| = c\,cos\frac{\beta}{2}$, $|AC''| = b\,cos\frac{\gamma}{2}$, $|B''C''| = s$

i kut pri vrhu A jednak

$$\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \pi - \frac{\beta+\gamma}{2}$$

Zato je tražena jednakost upravo kosinusov poučak za stranicu $B''C''$

$s^2 = b^2 cos^2\frac{\gamma}{2} + c^2 cos^2\frac{\beta}{2} - 2bc \cdot cos\frac{\beta}{2} cos\frac{\gamma}{2} cos\left(\pi - \frac{\beta+\gamma}{2}\right)$, **odnosno**

$$s^2 = b^2 cos^2\frac{\gamma}{2} + c^2 cos^2\frac{\beta}{2} + 2bc \cdot cos\frac{\beta}{2} cos\frac{\gamma}{2} cos\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH

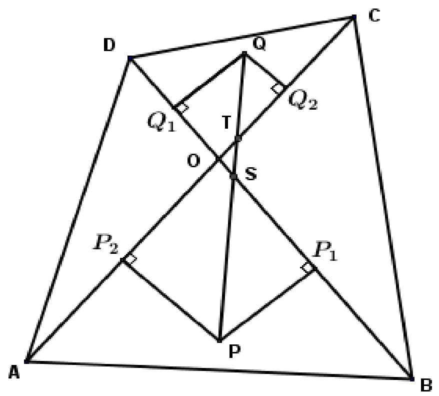
Stolac, 19. ožujka 2016.

.

IV. RAZRED

Zadatak 4. **Neka je O točka presjeka dijagonala konveksnog četverokuta $ABCD$, a točke P i Q su središta opisanih kružnica oko trokutova ΔAOB i ΔCOD, redom.**
Dokazati da vrijedi nejednakost $|PQ| \geq \frac{|AB|+|CD|}{4}$.

RJEŠENJE:



Neka su P_1, Q_1, P_2, Q_2 polovišta dužina $\overline{OB}, \overline{OD}, \overline{OA}, \overline{OC}$ redom. Tada je

$$|PQ| \geq |P_1S| + |Q_1S| = |P_1Q_1| \quad \text{tj.}$$

$$|PQ| \geq \frac{|BD|}{2} \qquad (1)$$

$$|PQ| \geq |P_2T| + |Q_2T| = |P_2Q_2| \quad \text{tj.}$$

$$|PQ| \geq \frac{|AC|}{2} \qquad (2)$$

Nakon zbrajanja (1) i (2) imamo

$$2|PQ| \geq \frac{|BD|+|AC|}{2} \quad \text{tj.}$$

$$|PQ| \geq \frac{|OB|+|OD|+|OA|+|OC|}{4}$$

$$|PQ| \geq \frac{[(|OB|+|OA|)+(|OC|+|OD|)]}{4} \qquad (3)$$

No, kako je $|OB||OA| > |AB|$ i $|OC|+|OD| > |CD|$ to slijedi iz (3)

$$|PQ| \geq \frac{|AB|+|CD|}{4}.$$

q.e.d.