Z A D A C I

I. RAZRED

1. **Odredi sve cijele brojeve n za koje je $\frac{5n-23}{n-7}$ cijeli broj.**

2. **Neka su a, b i c duljine stranica trokuta. Dokaži da tada vrijedi nejednakost:**
$$\frac{2}{b+c-a}+\frac{2}{c+a-b}+\frac{2}{a+b-c}>\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}.$$

3. **U trokutu ABC je $|AC|=6, |BC|=2$ i $\angle ACB=120^0$. Simetrala kuta $\angle ACB$ siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D. Odredi duljinu dužine $\overline{CD}$.**

4. **Kolika je površina skupa točaka čije koordinate u Kartezijevom koordinatnom sustavu zadovoljavaju nejednakost: $|x|+|y|+|x+y|\leq 2$?**

II. RAZRED

1. **Dokaži da je za svaki prirodan broj n, broj**
$\frac{n^4}{24}+\frac{n^3}{4}+\frac{11n^2}{24}+\frac{n}{4}$ **također prirodan broj.**

2. **Nađi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi**
$$\left|\frac{1}{z-i}+1\right|=1 \text{ i } \left|\frac{1}{z-i}-i\right|=1.$$

3. **Za koje realne brojeve m je najmanja vrijednost funkcije**
$$f(x)=4x^2-4mx+m^2-2m+2$$
na intervalu $[0,2]$ jednaka 3 ?

4. **Trokutu ABC upisana je kružnica polumjera r sa središtem u točki S. Pravac kroz točku S siječe stranice $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ redom u točkama D i E. Dokažite da za površinu P trokuta CED vrijedi $P\geq 2r^2$. Kada vrijedi jednakost?**

III. RAZRED

1. **Za duljine a, b kateta pravokutnog trokuta vrijedi**

   $$\log\frac{a-b}{2}=\frac{1}{2}(\log a+\log b-\log 2).$$

   Odredi šiljaste kutove tog trokuta.

2. **Riješi jednadžbu** $\log_2^2(x+y)+\log_2^2(xy)+1=2\log_2(x+y)$.

3. **Odredi sve parove (x,y) realnih brojeva za koje je**

   $$\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2+\left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2=12+\frac{1}{2}\sin y.$$

4. **Na stranici $\overline{BC}$ trokuta ABC leže redom točke N, L i M, pri čemu je $\overline{AN}$ visina, AL simetrala kuta $\angle CAB$ i $\overline{AM}$ težišnica.**
   Ako je $\angle NAB=\angle LAN=\angle MAL=\angle CAM$, odredite kutove trokuta ABC.

IV. RAZRED

1. **Dokaži da za svaki pozitivan cijeli broj n vrijedi jednakost**

   $$3a_1+5a_2+7a_3+\cdots+(2n+1)a_n=(n+1)^2a_n-\frac{1}{2}n(n+1),$$

   ako je

   $$a_k=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\text{, za svaki prirodan broj } k.$$

2. **Riješi jednadžbu** $\log_2^2(x+y)+\log_2^2(xy)+1=2\log_2(x+y)$.

3. **Odredi sve parove (x,y) realnih brojeva za koje je**

   $$\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2+\left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2=12+\frac{1}{2}\sin y.$$

4. **Na stranici $\overline{BC}$ trokuta ABC leže redom točke N, L i M, pri čemu je $\overline{AN}$ visina, AL simetrala kuta $\angle CAB$ i $\overline{AM}$ težišnica.**
   Ako je $\angle NAB=\angle LAN=\angle MAL=\angle CAM$, odredite kutove trokuta ABC.

RJEŠENJA

I. RAZRED

Zadatak 1.

Zadani razlomak se može zapisati u obliku

$$\frac{5n-23}{n-7}=\frac{5n-35+12}{n-7}=\frac{5(n-7)}{n-7}+\frac{12}{n-7}=5+\frac{12}{n-7}.$$

Dakle, dani izraz je cijeli broj ako i samo ako je 12 **djeljivo s** $n-7$.
Imamo:

$$n-7\in\{\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 4,\pm 6,\pm 12\}$$

odnosno

$$n\in\{-5,1,3,4,5,6,8,9,10,11,13,19\}$$

q.e.d.

Zadatak 2.

Grupirajmo članove na lijevoj strani na ovaj način:

$$\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\right)+\left(\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\right)+\left(\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}\right).$$

Promotrimo prvi pribrojnik:

$$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}=\frac{2c}{c^2-(a-b)^2}$$

Budući da je $0<c^2-(a-b)^2<c^2$ **(prva nejednakost zbog pretpostavke** $a<b+c, b<a+c$**), dobivamo**

$$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}>\frac{2c}{c^2},\ \textbf{odnosno}\ \frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}>\frac{2}{c}\quad(1)$$

Slično se izvode i nejednakosti

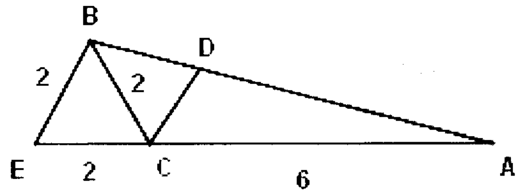
$$\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}>\frac{2}{a}\quad(2),\qquad \frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}>\frac{2}{b}\quad(3)$$

Zbrajanjem (1), (2) **i** (3) **se dobiva tvrdnja zadatka.**

$$\frac{2}{b+c-a}+\frac{2}{c+a-b}+\frac{2}{a+b-c}>\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}.$$

q.e.d.

Zadatak 3.

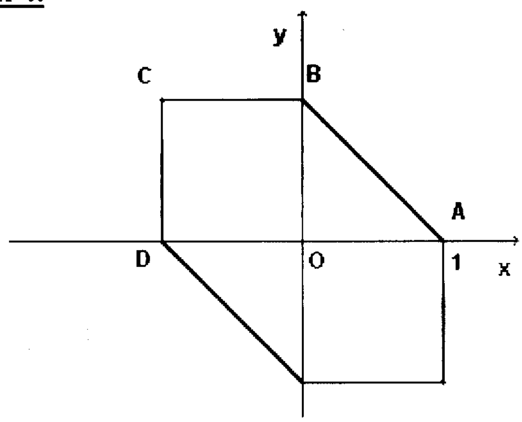


Neka je E točka na pravcu AC tako da je C između A i E, te $|CE| = |CB|$.
Trokut ECB je jednakostraničan i $BE \parallel DC$, pa iz sličnosti trokuta ACD i AEB dobivamo

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|EB|}{|AE|} \quad \text{tj.} \quad |CD| = \frac{3}{2}.$$

q.e.d.

Zadatak 4.



Za $u \geq 0$ je $|u| = u$, a za $u \leq 0$ je $|u| = -u$, tj. $|u| = |-u|$. Zato je područje P određeno sa $|x| + |y| + |x + y| \leq 2$ centralno simetrično u odnosu na ishodište, tj. ako je $(x, y) \in P$, onda je $(-x, -y) \in P$. Zato je dovoljno ispitati slučajeve u prvom i drugom kvadrantu, tj. za $y \geq 0$.
U prvom kvadrantu je $x \geq 0$ i $y \geq 0$ i stoga je $x + y \geq 0$, pa nejednadžba poprima oblik $x + y \leq 1$. Zadovoljavaju sve točke trokuta OAB (vidi sliku).

U drugom kvadrantu je $x \leq 0$ i $y \geq 0$. Moramo promatrati dva slučaja:
1^0 $x + y \geq 0$, (područje iznad pravca OC)
2^0 $x + y \leq 0$, (područje ispod pravca OC)
U prvom slučaju je $-x + y + x + y \leq 2$, tj. $y \leq 1$. Dakle, mora biti $-1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1$ i $x + y \geq 0$. Zadovoljavaju sve točke trokuta OBC.
U drugom slučaju je $-x + y - x - y \leq 2$, tj. $-1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1$ i $x + y \leq 0$.
Zadovoljavaju sve točke DOC.
Dakle, za $x \leq 0, y \geq 0$ zadovoljavaju točke kvadrata $OBCD$.
Za $y \leq 0$ dobije se centralnom simetrijom dobivenog lika za $y \geq 0$ u odnosu na ishodište, kako je prikazano na slici.
Površina dobivenog lika je 3.

q.e.d.

II. RAZRED

Zadatak 1.

Imamo: $\frac{n^4}{24}+\frac{n^3}{4}+\frac{11n^2}{24}+\frac{n}{4}=\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{24}=$

$$=\frac{n(n^3+6n^2+11n+6)}{24}=\frac{n(n^3+n^2+5n^2+5n+6n+6)}{24}=$$

$$=\frac{n(n+1)(n^2+5n+6)}{24}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}=$$

Brojnik $A=n(n+1)(n+2)(n+3)$ je produkt četiri uzastopna prirodna broja.
Od četiri uzastopna prirodna broja dva su djeljiva s 2, a jedan od njih s 4. (ako je $n=4k$, onda $2/n+2,4/n$, ako je $=4k+1$ onda $2/n+1,4/n+3$, ako je $n=4k+2$ onda $2/n,4/n+2$, ako je $n=4k+3$ onda $2/n+3,4/n+1$, $k\in N$). To znači da je A djeljivo s 8.
Od tri uzastopna prirodna broja jedan je djeljiv s 3. (ako je $n=3k$ onda $3/n$, ako je $n=3k+1$ onda $3/n+2$, ako je $n=3k+2$ onda $3/n+1$, $k\in N$)
Dakle, A je djeljiv s 8 i s 3 tj. A je djeljiv s $8\cdot 3=24$.

q.e.d.

Zadatak 2.

Uvrštavajući $z=x+iy$, $(x,y\in R)$, dobivamo

$\left|\frac{1}{x+iy-i}+1\right|=1$ **i** $\left|\frac{1}{x+iy-i}-i\right|=1$

$\left|\frac{x+1+i(y-1)}{x+i(y-1)}\right|=1$ **i** $\left|\frac{y-ix}{x+i(y-1)}\right|=1$

$|x+1+i(y-1)|=|x+i(y-1)|$ **i** $|y-ix|=|x+i(y-1)|$

$(x+1)^2+(y-1)^2=x^2+(y-1)^2$ **i** $y^2+x^2=x^2+(y-1)^2$,

$x^2+2x+1=x^2$ **i** $y^2+x^2=x^2+y^2+2y+1$

$x=-\frac{1}{2}$ **i** $y=\frac{1}{2}$

Dakle, $z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

q.e.d..

Zadatak 3.

Minimalna vrijednost funkcije $f(x)$ na skupu realnih brojeva poprima se za $x = \frac{m}{2}$,

(ovo je tjeme parabole)
Moramo razmotriti tri slučaja:

1^0 **Za** $\frac{m}{2} \in [0,2]$ **tj.** $m \in [0,4]$ **moralo bi biti**

$f\left(\frac{m}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{m}{2}\right)^2 - 4m \cdot \frac{m}{2} + m^2 - 2m + 2 = 3$ **odakle slijedi** $m = -\frac{1}{2} \notin [0,4]$**, što nije moguće.**

2^0 **Za** $\frac{m}{2} < 0$**, tj.** $m < 0$ **funkcija je rastuća na intervalu** $[0,2]$**, te ima minimum za** $x = 0$**. Iz** $f(0) = m^2 - 2m + 2 = 3$**, dobiva se** $m_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$**.**

Zbog $m < 0$ **je** $m = 1 - \sqrt{2}$**.**

3^0 **Za** $\frac{m}{2} > 2$**, tj.** $m > 4$**, funkcija** $f(x)$ **pada na intervalu** $[0,2]$**, pa poprima najmanju vrijednost za** $x = 2$**. U ovom slučaju je**

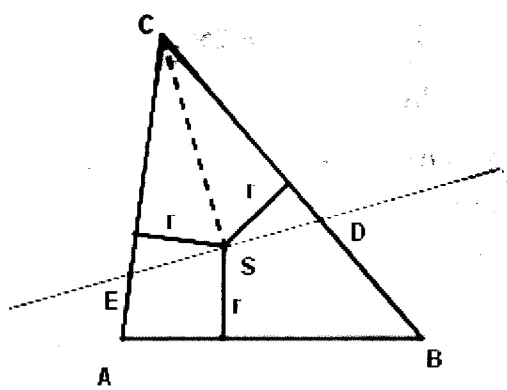
$$f(2) = 16 - 8m + m^2 - 2m + 2 = 3, \text{ tj. } m^2 - 10m + 15 = 0,$$

Odavde se dobiva $m_{1,2} = 5 \pm \sqrt{10}$**. Zbog** $m > 4$ **je** $m = 5 + \sqrt{10}$**.**

Dakle, uvjeti zadatka su zadovoljeni za $m = 1 - \sqrt{2}$ **i** $m = 5 + \sqrt{10}$**.**

q.e.d.

Zadatak 4.



Za površinu P **trokuta** CED **Vrijedi:**

$$P = P(CES) + P\left(CSD = \frac{1}{2}|CE| \cdot r + \frac{1}{2}|CD| \cdot r\right) = \frac{|CE| + |CD|}{2} \cdot r.$$

Zbog $A - G$ **nejednakosti imamo** $\frac{|CE| + |CD|}{2} \geq \sqrt{|CE| \cdot |CD|}$ **pa je** $P \geq \sqrt{|CE| \cdot |CD|} \cdot r$**.**

Umnožak duljina dviju stranica trokuta nije manji od dvostruke površine tog trokuta.
U našem slučaju je $|CE| \cdot |CD| \geq 2P$ **, pri čemu vrijedi jednakost ako i samo ako je kut** γ **u vrhu** C **pravi.**

Zato je $P \geq \sqrt{|CE| \cdot |CD|} \cdot r \geq \sqrt{2P} \cdot r$**, pa slijedi** $P^2 \geq 2P \cdot r^2$ **odnosno** $P \geq 2r^2$**, što je i trebalo dokazati. Jednakost u nejednakosti vrijedi ako je** $|CE| = |CD|$ **i** $\gamma = 90^0$

q.e.d

III. RAZRED

Zadatak 1.

Jednakost $\log\frac{a-b}{2}=\frac{1}{2}(\log a+\log b-\log 2)$. **možemo zapisati u obliku**

$2\log\frac{a-b}{2}=\log a+\log b-\log 2$ **dalje imamo**

$\log\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\log\frac{ab}{2}$, **tj.**

$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{ab}{2}$, **odakle nakon sređivanja imamo**

$$a^2+b^2=4ab$$

Pošto su a **i** b **katete u pravokutnom trokutu, ako je** c **hipotenuza tog trokuta vrijedi** $a^2+b^2=c^2$, **uvrštavanjem u prethodnu jednakost dobivamo:** $c^2=4ab$.

Nadalje, zbog $\sin\alpha=\frac{a}{c},\cos\alpha=\frac{b}{c}$, **je**

$$4ab=4\cdot c\sin\alpha\cdot c\cos\alpha=4c^2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha,$$

pa možemo posljednju jednakost zapisati u obliku $4\sin\alpha\cos\alpha=1$, **tj.**

$$\sin 2\alpha=\frac{1}{2}.$$

Slijedi $2\alpha=30^0$ **ili** $2\alpha=150^0$, **tj.** $\alpha=15^0$ **ili** $\alpha=75^0$.

Budući da mora biti $\frac{a-b}{2}>0$ **(kako bi logaritam s početka zadatka bio definiran), zaključujemo** $a>b$, **tj.** $\alpha>\beta=90^0-\alpha$, **pa dolazi u obzir jedino rješenje**

$$\alpha=75^0,\beta=15^0$$

q.e.d.

Zadatak 2

Zapišimo jednadžbu u obliku

$$\log_2^2(xy)+\left[\log_2^2(x+y)-1\right]^2=0$$

Time dobivamo sustav jednadžbi:

$\log_2(xy)=0$

$\log_2(x+y)=1$, **odavde dobivamo sustav jednadžbi**

$$xy=1$$
$$x+y=2$$

Rješenje ovog sustava je: $x=1,y=1$.

q.e.d.

Zadatak 3.

Nakon kvadriranja imamo:

$$\sin^4 x + \frac{1}{\sin^4 x} + 2 + \cos^4 x + \frac{1}{\cos^4 x} + 2 = 12 + \frac{1}{2}\sin y,$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x} = 8 + \frac{1}{2}\sin y$$ **, ovo možemo zapisati u obliku**

$$2\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)\left(1 + \frac{1}{\sin^4 x \cdot \cos^4 x}\right) = 16 + \sin y$$

Zbog $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$ **i** $\sin^4 x \cdot \cos^4 x = \frac{1}{16}\sin^4 2x$**, dobivamo**

$$\left(2 - \sin^2 2x\right)\left(1 + \frac{16}{\sin^4 2x}\right) = 16 + \sin y$$

Kako $2 - \sin^2 2x \geq 1$ **i** $1 + \frac{16}{\sin^4 x} \geq 17$**, a izraz na desnoj strani** $16 + \sin y \leq 17$**, moraju svugdje biti jednakosti.**

Dakle,

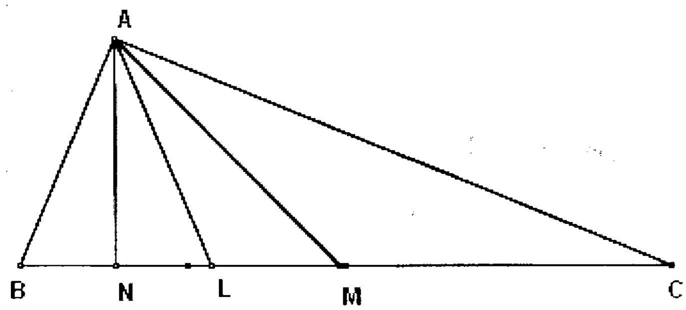
$$\sin^2 2x = 1,\ \sin^4 2x = 1,\ \sin y = 1,$$

pa je

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\quad y = \frac{\pi}{2} + 2l\pi,\quad k, l \in Z.$$

q.e.d.

Zadatak 4



(označimo: $|AB|=c, |BC|=a, |AC|=b,\ \angle BAC=\alpha, \angle CBA=\beta, \angle ACB=\gamma$ **)**

Primjenom sinusovog poučka na ΔALM **dobije se** $\dfrac{|AM|}{\sin\angle ALM}=\dfrac{|AL|}{\sin\angle LMA}$. (1)

Lako se vidi da je $\angle ALM=90^0+\dfrac{\alpha}{4}$ **(**$\angle ALM$ **vanjski kut** ΔANL**),**

$\angle LMA=180^0-\left(90^0+\dfrac{\alpha}{4}\right)-\dfrac{\alpha}{4}=90^0-\dfrac{\alpha}{2}$ **i** $|AL|=|AB|=c$ **(**ΔABL **je jednakokračan)**

Iz (1) **dobivamo** $|AM|=\dfrac{c\cdot\sin\left(90^0+\dfrac{\alpha}{4}\right)}{\sin\left(90^0-\dfrac{\alpha}{2}\right)}=\dfrac{c\cdot\cos\dfrac{\alpha}{4}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$. **Točka** M **je polovište stranice** $\overline{BC}$**,**

pa je $P(ABC)=2P(AMC)$**, odnosno** $\dfrac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha=|AM|\cdot b\cdot\sin\dfrac{\alpha}{4}$.

Iz ovih jednakosti dobivamo $\sin\alpha=\dfrac{2\sin\dfrac{\alpha}{4}\cos\dfrac{\alpha}{4}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$, **tj.** $2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$,

$\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}$, **tj.** $\dfrac{\alpha}{2}=45^0$ **(**$\dfrac{\alpha}{2}$ **je šiljast kut, jer je** $\alpha<180^0$ **) tj.** $\alpha=90^0$

Odavde napokon slijedi $\beta=90^0-\dfrac{\alpha}{4}=67^030'$, $\gamma=90^0-\beta=22^030'$.

q.e.d.

IV. RAZRED

Zadatak 1.

Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom. Za $n = 1$ i lijeva i desna strana su jednake 3.
Pretpostavimo da je

$$3a_1 + 5a_2 + 7a_3 + \cdots + (2k+1)a_k = (k+1)^2 a_k - \frac{1}{2}k(k+1)$$

za $k \geq 1$ i $k \in N$.
Tada je

$$3a_1 + 5a_2 + 7a_3 + \cdots + (2k+1)a_k + (2k+3)a_{k+1} = (k+1)^2 a_k - \frac{1}{2}k(k+1) + (2k+3)a_{k+1}$$

a odavde korištenjem $a_k = a_{k+1} - \dfrac{1}{k+1}$

dobivamo

$$3a_1 + 5a_2 + 7a_3 + \cdots + (2k+1)a_k + (2k+3)a_{k+1} = (k^2 + 4k + 4)a_{k+1} - (k+1) - \frac{1}{2}k(k+1) =$$

$$= (k+2)^2 a_{k+1} - \frac{1}{2}(k+1)(k+2).$$

Čime smo proveli korak indukcije i dokazali tvrdnju.

q.e.d.

Zadatak 2 **Isti kao 2. zadatak za III. razred**

Zadatak 3 **Isti kao 3. zadatak za III. razred**

Zadatak 4 **Isti kao 4. zadatak za III. razred**