Z A D A C I

I. RAZRED

1. **Dokažite da je svaki broj oblika $m^4 + 4k^4$ složen, ako su m i k pozitivni cijeli brojevi i $k \geq 2$.**

2. **Za koje realne brojeve a jednadžba $|x-2| + |3-x| = a$ ima točno dva rješenja?**

3. **Odjel od 28 učenika dobio je za domaću zadaću 8 zadataka. Svaki učenik riješio je točno dva zadatka, a nikoja dva učenika nisu riješila ista dva zadatka. Pokaži da je svaki zadatak riješilo jednako mnogo učenika. Koliko?**

4. **Težišnica i visina iz vrha A trokuta ΔABC dijele kut kod vrha A na tri jednaka dijela. Koliki su kutovi trokuta ΔABC?**

II. RAZRED

1. **Neka su z_1, z_2 i z_3 kompleksni brojevi takvi da je $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ i $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Dokažite da izraz**

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2$$

poprima jednu te istu vrijednost za svaki izbor kompleksnih brojeva koji zadovoljavaju gornje uvjete.

2. **Za koje vrijednosti realnog parametra m nejednakost $-3 < \frac{x^2 + mx - 2}{x^2 - x + 1} < 2$, je ispunjena za sve realne vrijednosti x.**

3. **Dokazati da je kvadrat duljine simetrale kuta trokuta jednak razlici umnožaka duljina stranica između kojih se ona nalazi i umnoška duljina odsječaka treće stranice na koje je ona podijeljena tom simetralom.**

4. **Neka je a pozitivan realan broj, a x_1, x_2, x_3 realni brojevi takovi da je $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Dokazati nejednakost**

$$\log_2\left(1 + a^{x_1}\right) + \log_2\left(1 + a^{x_2}\right) + \log_2\left(1 + a^{x_3}\right) \geq 3$$

III. RAZRED

1. **Ako je $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, dokažite sljedeći trigonometrijski identitet**
   $$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

2. **Riješi nejednadžbu $2^{2x}\le 3\cdot 2^{x+\sqrt{x}}+4\cdot 2^{2\sqrt{x}}$.**

3. **Odredite sve parove (x,y) realnih brojeva za koje vrijedi**
   $$\log_2\left[2\cos^2(xy)+\frac{1}{2\cos^2(xy)}\right]-1=-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2.$$

4. **U pravilnoj trostranoj piramidi kut nagiba bočnog brida prema ravnini baze jednak je plošnom kutu uz vrh piramide. Odredite volumen piramide ako je duljina brida baze jednaka a.**

IV. RAZRED

1. **Niz a_n zadan je rekurzivno sa $a_0=-1$, $a_n=\dfrac{2a_{n-1}-3}{3a_{n-1}-4}$, $n\in N$.**

   Odredite formulu za a_n. (Zadatak je riješen ako je formula za a_n dokazana.)

2. **Dokažite da za svaku točku z kompleksne ravnine, za koju je $|z-1|=1$, točka $\frac{1}{z}$ leži na jednom te istom pravcu. Na kojem?**

3. **Odredite sve parove (x,y) realnih brojeva za koje vrijedi**
   $$\log_2\left[2\cos^2(xy)+\frac{1}{2\cos^2(xy)}\right]-1=-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2$$

4. **U pravilnoj trostranoj piramidi kut nagiba bočnog brida prema ravnini baze jednak je plošnom kutu uz vrh piramide. Odredite volumen piramide ako je duljina brida baze jednaka a.**

R J E Š E NJ A

I. RAZRED

Zadatak 1.

$$\begin{aligned} m^4+4k^4 &= m^4+4m^2k^2+4k^4-4m^2k^2= \\ &=\left(m^2+2k^2\right)^2-(2mk)^2= \\ &=\left(m^2+2k^2-2mk\right)\left(m^2+2k^2+2mk\right)= \\ &=\left[(m-k)^2+k^2\right]\cdot\left[(m+k)^2+k^2\right]. \end{aligned}$$

Budući da je svaki od ova dva faktora (zbog $k\geq 2$) veći od 1, broj m^4+4k^4 je složen.

q.e.d

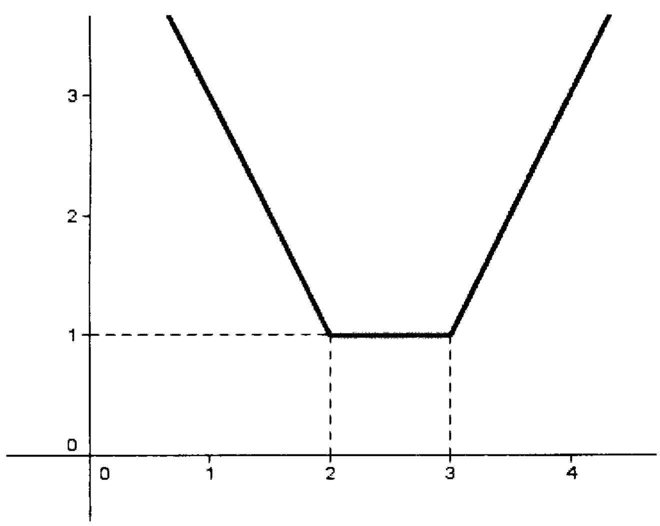
Zadatak 2.

Najprije skicirajmo krivulju $y=|x-2|+|3-x|$.

Za $x<2$ **je** $y=-x+2+3-x=5-2x$

Za $x\in[2,3]$ **je** $y=x-2+3-x=1$

Za $x>3$ **je** $y=x-2-3+x=2x-5$



Jednadžba $|x-2|+|3-x|=a$ **ima točno dva rješenja za one vrijednosti** a **za koje pravac** $y=a$ **siječe krivulju u točno dvije točke, tj. za** $a>1$.

q.e.d.

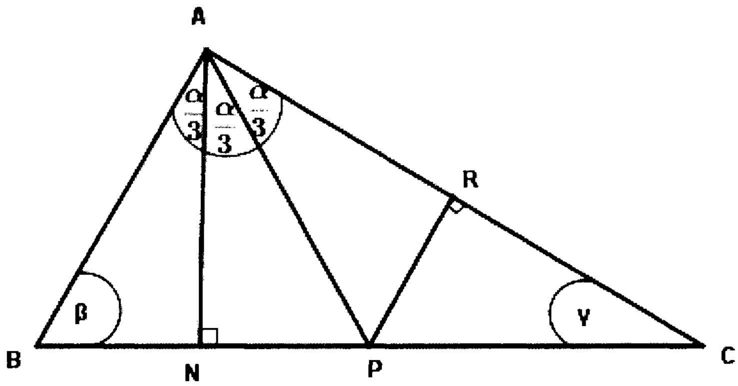
Zadatak 3.

Parova zadataka ima $\frac{8\cdot 7}{2}=28$, tj. jednako mnogo kao i učenika. Zato za svaki par zadataka postoji točno jedan učenik koji je riješio upravo njih. Svaki zadatak se nalazi u 7 parova, pa ga je riješilo točno 7 učenika.

q.e.d.

Zadatak 4.

Označimo s N nožište visine iz vrha A, s P polovište stranice $\overline{BC}$, s R nožište okomice iz P na $\overline{AC}$, $|AB|=c$, $|\overline{BC}|=a$, $|\overline{CA}|=b$.



Trokuti BNA i PNA su sukladni (stranica i dva kuta) odakle dobivamo

$$|AB|=|AP|=c,\quad |BN|=|NP|=\frac{1}{2}|BP|=\frac{a}{4}.$$

Nadalje, iz sukladnosti trokuta PNA i PRA (stranica i dva kuta) je

$$|AR|=|AN| \text{ i } |PR|=|PN|=\frac{a}{4}.$$

Po Pitagorinom poučku za trokut PRC je

$$|RC|^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{4}\right)^2 \Rightarrow |RC|=\frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Iz sličnosti trokuta ANC i PRC (dva kuta) imamo

$$\frac{|NC|}{|AN|}=\frac{|RC|}{|PR|} \text{ tj. } \frac{\frac{3a}{4}}{|AN|}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{a}{4}}$$

Odakle je $|AR|=|AN|=\frac{a\sqrt{3}}{4}=|RC|$.

Odavde dobivamo da su trokuti PRA i PRC sukladni (stranica i dva kuta), pa je $\gamma=\frac{\alpha}{3}$.

Iz trokuta BNA imamo $\beta+\frac{\alpha}{3}=90^0$ odakle je $\beta+\gamma=90^0$. Napokon iz $\alpha+\beta+\gamma=180^0$ dobivamo $\alpha=90^0, \gamma=30^0$ i $\beta=60^0$.

q.e.d.

II. RAZRED

Zadatak 1.

Stavimo $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1,2,3$. Prema uvjetu zadatka je $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ i $y_1 + y_2 + y_3 = 0$.

Sada je $|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 =$

$$= (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (y_2 + y_3)^2 + (x_3 + x_1)^2 + (y_3 + y_1)^2.$$

Nakon kvadriranja i sređivanja dobivamo da je polazni izraz jednak

$$x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + x_3^2 + y_3^2 + (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (y_1 + y_2 + y_3)^2 = 3.$$

q.e.d.

Zadatak 2.

Kako je $x^2 - x + 1 > 0$ za sve realne vrijednosti x, jer je diskriminanta ovog trinoma $D = -3 < 0$, a koeficijent uz x^2 pozitivan, to množenjem obje nejednadžbe s nazivnikom dani sustav ekvivalentan je sustavu

$$\begin{array}{lcl} -3x^2 + 3x - 3 < x^2 + mx - 2 & \Leftrightarrow & 4x^2 + (m-3)x + 1 > 0 \\ \underline{x^2 + mx - 2 < 2x^2 - 2x + 2} & & \underline{x^2 - (m+2)x + 4 > 0} \end{array}$$

Prva nejednadžba točna je za $\forall x \in R$ ako i samo ako je diskriminanta kvadratnog trinoma manja od nule tj.

$$(m-3)^2 - 16 < 0.$$

Analogno druga nejednadžba je zadovoljena za $\forall x \in R$ ako je

$$(m+2)^2 - 16 < 0$$

Rješenje sustava nejednadžbi

$$\begin{array}{l} (m-3)^2 - 16 < 0 \\ \underline{(m+2)^2 - 16 < 0} \end{array}$$

po m dobiva se

$$|m-3| < 4 \Rightarrow -4 < m - 3 < 4 \Rightarrow -1 < m < 7$$

$$|m+2| < 4 \Rightarrow -4 < m + 2 < 4 \Rightarrow -6 < m < 2,$$

Konačno imamo

$$-1 < m < 2.$$

q.e.d.

Zadatak 3.

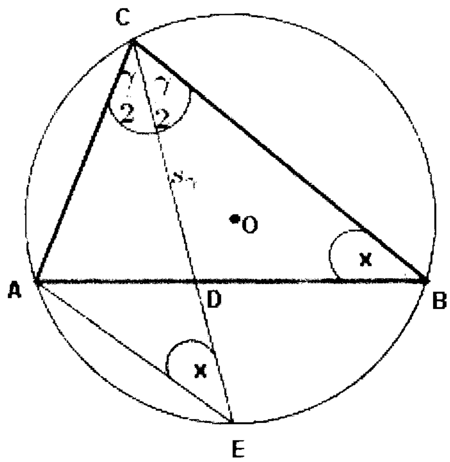
Neka je CD simetrala kuta $\gamma = \angle ACB$ trokuta ΔABC; $D \in \overline{AB}$ i E je točka u kojoj pravac CD siječe kružnicu k opisanu oko ΔABC. Iz sličnosti trokuta ΔACE i ΔBCD (jer je $\angle ACE = \angle BCD = \frac{\gamma}{2}$ i $\angle AEC = \angle DBC$ kao obodni kutovi nad istim lukom AC kružnice k) slijedi:

$$|CE| : |AC| = |BC| : |CD|$$

a odavde slijedi

$$(|CD| + |DE|) \cdot |CD| = |BC| \cdot |AC| \text{, pa je}$$

$$|CD|^2 = |BC| \cdot |AC| - |CD| \cdot |DE| \text{ ....(1)}$$



Kako je (zbog potencije točke D s obzirom na opisanu kružnicu k)

$$|CD| \cdot |DE| = |AD| \cdot |BD| \text{, ... (2)}$$

to na temelju (1) i (2) dobivamo

$$|CD|^2 = |BC| \cdot |AC| - |AD| \cdot |BD| .$$

q.e.d.

Zadatak 4.

Nejednakost $\log_2(1 + a^{x_1}) + \log_2(1 + a^{x_2}) + \log_2(1 + a^{x_3}) \geq 3$ zapišimo u ekvivalentnom obliku: $\log_2(1 + a^{x_1}) + \log_2(1 + a^{x_2}) + \log_2(1 + a^{x_3}) \geq \log_2 8$

ili

$$(1 + a^{x_1}) \cdot (1 + a^{x_2}) \cdot (1 + a^{x_3}) \geq 8$$

Primjenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine na lijevu stranu imamo:

$$(1 + a^{x_1}) \cdot (1 + a^{x_2}) \cdot (1 + a^{x_3}) \geq 2\sqrt{a^{x_1}} \cdot 2\sqrt{a^{x_2}} \cdot 2\sqrt{a^{x_3}} = 8\sqrt{a^{x_1+x_2+x_3}} = 8$$

q.e.d.

III. RAZRED

Zadatak 1.

$$\begin{aligned}\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma &= \sin\alpha+\sin\beta+\sin[\pi-(\alpha+\beta)]=\\ &=\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)=\\ &=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\\ &=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\\ &=2\sin\frac{\pi-\gamma}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=\\ &=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

q.e.d.

Zadatak 2.

Jednadžba ima smisla za $x\geq 0$
Tada je:

$$\begin{aligned}&4\cdot 2^{2\sqrt{x}}+3\cdot 2^{x+\sqrt{x}}-2^{2x}\geq 0\\ &4\cdot 2^{2\sqrt{x}}+4\cdot 2^{x+\sqrt{x}}-2^{x+\sqrt{x}}-2^{2x}\geq 0\\ &4\cdot 2^{\sqrt{x}}\left(2^{\sqrt{x}}+2^{x}\right)-2^{x}\left(2^{\sqrt{x}}+2^{x}\right)\geq 0\\ &\left(2^{\sqrt{x}}+2^{x}\right)\left(4\cdot 2^{\sqrt{x}}-2^{x}\right)\geq 0\end{aligned}$$

Kako je $2^{\sqrt{x}}+2^{x}>0$ **za sve** $x\in R$, **treba riješiti**

$$\begin{aligned}&4\cdot 2^{\sqrt{x}}-2^{x}\geq 0\\ &2^{\sqrt{x}+2}\geq 2^{x}\\ &\sqrt{x}+2\geq x\\ &x-\sqrt{x}-2\leq 0\\ &\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)\leq 0\end{aligned}$$

Odavde slijedi $\sqrt{x}\in[-1,2]$ **odnosno** $\sqrt{x}\in[0,2]$ **(zbog uvjeta** $x\geq 0$**) pa je** $x\in[0,4]$.

q.e.d.

Zadatak 3.

S obzirom da su $2\cos^2(xy)$ **i** $\dfrac{1}{2\cos^2(xy)}$ **pozitivni brojevi, možemo primijeniti AG nejednakost:**

$$2\cos^2(xy)+\frac{1}{2\cos^2(xy)}\geq 2\sqrt{2\cos^2(xy)\cdot\frac{1}{2\cos^2(xy)}}=2.$$

Odavde slijedi,

$$\log_2\left[2\cos^2(xy)+\frac{1}{2\cos^2(xy)}\right]-1\geq\log_2 2-1=0.$$

S druge strane je $-\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2\leq 0$. **Dakle, da bi vrijedila jednakost,**

mora biti $y=\frac{1}{2}$ **i** $2\cos^2(xy)+\frac{1}{2\cos^2(xy)}=2$

Slijedi, $\left(2\cos^2(xy)-1\right)^2=0$

$$2\cos^2(xy)=1, \text{ (zbog } y=\frac{1}{2}\text{)}$$

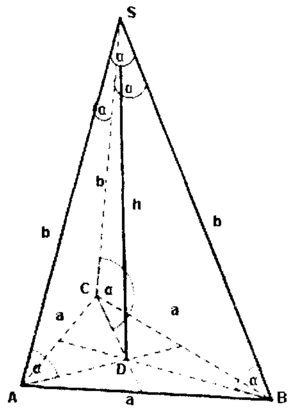
Odavde dobivamo

$$2\cos^2\frac{x}{2}=1 \Rightarrow \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1+\cos x}{2}=\frac{1}{2} \text{ tj. } \cos x=0 \text{ i } x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z.$$

Dakle, $(x,y)\in\left\{\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{1}{2}\right):k\in Z\right\}$.

q.e.d.

Zadatak 4.



Neka je baza piramide trokut ABC**, a vrh točka** S**, te neka je** D **središte trokuta** ABC**. Neka je** b **duljina pobočke a** h **visina piramide, te neka je** $\angle ASB=\angle SAD=\alpha$**. Tada vrijedi:**

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{3}b} \qquad (\Delta ADS)$$

$$h^2=b^2-\frac{a^2}{3} \qquad (\Delta ADS)$$

$$a^2=2b^2(1-\cos\alpha) \qquad (\Delta ABS).$$

Uvrštavanjem prve jednadžbe i treću dobiva se

$$2b^2\sqrt{3}-2ab-a^2\sqrt{3}=0$$

odakle slijedi $b=\frac{a(1\pm\sqrt{7})}{2\sqrt{3}}$**, pri čemu ima smisla samo** $b=\frac{a(1+\sqrt{7})}{2\sqrt{3}}$

dalje je $h^2=\frac{2+\sqrt{7}}{6}a^2$**, pa je konačno** $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot h=\frac{a^3}{12}\cdot\sqrt{\frac{2+\sqrt{7}}{2}}$.

q.e.d.

IV. RAZRED

Zadatak 1.

Izračunajmo prvih nekoliko članova ovog niza :

$$a_1 = \frac{5}{7},\ a_2 = \frac{11}{13},\ a_3 = \frac{17}{19}.$$

Pretpostavimo da je točna formula

$$a_n = \frac{6n-1}{6n+1}$$

Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom.

1^0 **Za** $n=1$ **formula vrijedi**

2^0 **Pretpostavimo da ona vrijedi za neki** $n \geq 1$. **Tada je**

$$a_{n+1} = \frac{2\cdot\frac{6n-1}{6n+1}-3}{3\cdot\frac{6n-1}{6n+1}-4} = \frac{6n+5}{6n+7} = \frac{6(n+1)-1}{6(n+1)+1},$$

Pa tvrdnja vrijedi i za $n+1$. **Prema principu matematičke indukcije, ona vrijedi za svaki prirodan broj** $n \geq 1$.

q.e.d.

Zadatak 2.

Ako je $|z-1|=1$, **onda je** $z-1=\cos\varphi + i\sin\varphi, \varphi\in[0,2\pi]$, **odnosno**

$$z = 1+\cos\varphi + i\sin\varphi, \varphi\in[0,2\pi]$$

Odavde slijedi:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+\cos\varphi+i\sin\varphi}\cdot\frac{1+\cos\varphi-i\sin\varphi}{1+\cos\varphi-i\sin\varphi} = \frac{1+\cos\varphi-\sin\varphi}{(1+\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi} =$$

$$= \frac{1+\cos\varphi-i\sin\varphi}{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi} = \frac{1+\cos\varphi-i\sin\varphi}{2(1+\cos\varphi)} = \frac{1}{2} - i\frac{\sin\varphi}{2(1+\cos\varphi)}.$$

Stoga sve točke $\frac{1}{z}$ **kompleksne ravnine, uz uvjet** $|z-1|=1$, **leže na pravcu** $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$.

q.e.d.

Zadatak 3. **Isti kao 3. zadatak za III. razred**

Zadatak 4. **Isti kao 4. zadatak za III. razred**

ZADATKE PRIPREMIO

Za I. II. III. i IV. razred .... NIKO SUŠAC, prof.

NATJECATELJSKA KOMISIJA- SŠ

1. **NIKO SUŠAC, prof.**
2. **MOMČILO VUJOVIĆ, prof.**
3. **ZORA SPAJIĆ, prof.**

REZULTATI NATJECANJA IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA FEDERACIJE BIH

Osvojeno mjesto	I razred	Škola	Mjesto
I. mjesto	Katarina Ivanković	Gimnazija fra Grge Martića	Mostar
II. mjesto	Naria Djedović	KŠC „Sveti Franjo“	Tuzla
III. mjesto	Anto Senković	SŠ Pere Zečevića	Odžak
	II razred		
I. mjesto	Nikica Perić	Gim. fra Dominika Mandića“	Široki Brijeg
II. mjesto	Hana Čičević	Gimnazija fra Grge Martića	Mostar
III. mjesto	Ivona Raguž	Srednja škola Stolac	Stolac
	III razred		
I. mjesto	Irma Hadžić	KŠC „Sveti Franjo“	Tuzla
II. mjesto	Nikola Mandić	Gimnazija fra Grge Martića	Mostar
III. mjesto	Luka Marušić	Gim. fra Dominika Mandića“	Široki Brijeg
	IV razred		
I. mjesto	Nikolina Barišić	Srednja škola Prozor	Prozor
II. mjesto	Mladen Peić	KŠC „Sveti Franjo“	Tuzla
III. mjesto	Ivan Bartulović	Franjevačka klasična gimnazija	Visoko

UČENICI KOJI SU SE PLASIRALI NA NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA NA RAZINI BIH

1.	Katarina Ivanković	Gimnazija fra Grge Martića	Mostar
2.	Nikica Perić	Gim. fra Dominika Mandića“	Široki Brijeg
3.	Irma Hadžić	KŠC „Sveti Franjo“	Tuzla
4.	Nikola Mandić	Gimnazija fra Grge Martića	Mostar
5.	Luka Marušić	Gim. fra Dominika Mandića“	Široki Brijeg
6.	Nikolina Barišić	Srednja škola Prozor	Prozor
7.	Mladen Peić	KŠC „Sveti Franjo“ Tuzla	Tuzla
8.	Ivan Bartulović	Franjevačka klasična gimnazija	Visoko
9.	Domagoj Krešimir Jukić	KŠC „ Don Bocko“ Žepče	Žepče