NATJECANJA IZ MATEMATIKE

UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA FEDERACIJE BIH

Visoko, 5. travnja 2025.

UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA HNŽ, ZHŽ, PŽ I HBŽ

VIII. i IX. razreda održana su 11. travnja 2025. (Mostar, Ljubuški, Bok i Livno)

VI. i VII. razreda održano je 23. svibnja 2025. (Čapljina, Kočerin, Tolisa i Zabrišće)

BILTEN

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA

NAKLADNIK

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA

ZA NAKLADNIKA

MARINKO ANTUNOVIĆ, prof.

NAKLADA U 1000 PRIMJERAKA

SADRŽAJ

PROGRAM NATJECANJA – SREDNJE ŠKOLE

09:30	**Sastanak profesora-pratitelja učenika**
10:00	**<u>Svečano otvaranje natjecanja</u>** **Sudionike natjecanja i goste pozdravili su:** **Stipo Alandžak, ravnatelj FKG** **Marinko Antunović, predsjednik UMRB Žepče**
10:15-13:15	**Natjecanje učenika – izrada zadataka**
13:15-15:00	**Rad komisija – pregled učeničkih radova**
12:00-15:00	**Ručak za sve sudionike natjecanja**
15:00	**Neslužbeni rezultati natjecanja (pod šiframa)**
15:00-15:30	**Reklamacije učenika-natjecatelja Natjecateljskoj komisiji**
15:45	**Proglašenje službenih rezultata natjecanja, dodjela diploma i nagrada najuspješnijim učenicima**
16:00	**Zatvaranje natjecanja**

Z A D A C I

1 . RAZRED

1. **Odrediti rješenja sustava (uz uvjet $x, y, z > 0$)**

$$\begin{cases} \dfrac{xyz}{x+y} = 2 \\ \dfrac{xyz}{y+z} = 1.2. \\ \dfrac{xyz}{z+x} = 1.5 \end{cases}$$

2. **Dokažite da za sve realne brojeve a, b i c, za koje je $a + b + c = 0$ vrijedi:**

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3+c^3}{3} = \frac{a^5+b^5+c^5}{5}.$$

3. **Duljine stranica trokuta su tri uzastopna prirodna broja. Dokazati da visina trokuta povučena na stranicu srednje duljine dijeli tu stranicu na dijelove čija je razlika 4.**

4. **Kocka sira dimenzija $3x3x3$ podijeljena je na 27 jediničnih kocki. Miš gricka sir tako što jede jedinične kocke jednu za drugom, ali tako da poslije pojedene jedne jedinične kocke prelazi na njoj susjednu. Dvije jedinične kocke su susjedne ako imaju zajedničku stranu. Može li miš pojesti sav sir tako što će otpočeti sa jediničnom kockom koja sadrži jedan vrh kocke $3x3x3$, a završiti sa jediničnom kockom koja se nalazi u sredini?**

2 . RAZRED

1. **Odrediti realni broj α takav da vrijedi**

$$\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2-a^2}}\right)^{-2} = \left(\frac{m}{n}\right)^{\alpha}$$

ako je $x = \sqrt{\frac{m^2+n^2}{2mn}}, a > 0, m > 0, n > m.$

2. **Riješite sustav jednadžbi**

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2 \end{cases}.$$

3. **Odredite polinom 3.stupnja s realnim koeficijentima tako da vrijedi**

$$P(1-i) = 2 + i, \quad P(i) = 1 - 2i.$$

4. **Duljine težišnica trokuta ABC su $t_a = 9$, $t_b = 12$ i $t_c = 15$. Kolika je duljina one stranice trokuta ABC kojoj odgovara najdulja težišnica.**

3 . RAZRED

1. **Riješite jednadžbu**

$$log_3x \cdot log_4x \cdot log_5x = log_3x \cdot log_4x + log_4x \cdot log_5x + log_5x \cdot log_3x.$$

2. **Odrediti rješenja sustava jednadžbi, uz uvjet $x, y \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$**

$$\begin{cases} cosx = 2cos^3y \\ sinx = 2sin^3y \end{cases}.$$

3. **Riješiti nejednadžbu**

$$4^{x-\frac{5}{2}+\sqrt{x^2-4}} + 2^{2x-6+2\sqrt{x^2-4}} \geq 3^{x-3+\sqrt{x^2-4}} + 3^{x-2+\sqrt{x^2-4}}.$$

4. **Visina posude valjkastog oblika jednaka je promjeru baze. U posudu je prvo smješten uspravni stožac, čiji su polumjer baze i visina jednaki odgovarajućim veličinama valjka, a zatim i šest loptica jednakog polumjera. Svaka loptica dodiruje posudu, plast stošca i dvije susjedne loptice. Da li loptice jednim svojim dijelom izlaze iz posude?**

4. RAZRED

1. **Odredite ona rješenja jednadžbe**

$$(1-i)z^4 + (1+i)z = 0,$$

$z \in \mathbb{C}$, koja zadovoljavaju uvjet $|z - 1 + i| \leq \frac{3}{2}$.

2. **Ako $sin(\beta+\gamma-\alpha)$, $sin(\gamma+\alpha-\beta)$, $sin(\alpha+\beta-\gamma)$ čine aritmetički niz, dokažite da i $tg\alpha, tb\beta, tg\gamma$ također čine aritmetički niz.**

3. **Riješite jednadžbu**

$$tgx + 6ctgx = \sqrt{\frac{1}{cos^2x} - 1} - 4\sqrt{3}.$$

4. **Naći sve funkcije $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, takve da vrijedi**

$$f(yf(x+y)+f(x)) = 4x + 2yf(x+y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

R J E Š E N J A

1. RAZRED

Zadatak 1. Odrediti rješenja sustava (uz uvjet $x, y, z > 0$)

$$\begin{cases} \dfrac{xyz}{x+y} = 2 \\ \dfrac{xyz}{y+z} = 1.2. \\ \dfrac{xyz}{z+x} = 1.5 \end{cases}$$

RJEŠENJE:

Uzmimo recipročne vrijednosti zadanih jednadži

$$\frac{xyz}{x+y} = 2 \Rightarrow \frac{x+y}{xyz} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{xyz}{y+z} = 1.2 \Rightarrow \frac{y+z}{xyz} = \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = \frac{5}{6}$$
$$\frac{xyz}{z+x} = 1.5 \Rightarrow \frac{z+x}{xyz} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} = \frac{2}{3}$$

Zbrojimo sve tri jednadžbe i dobijemo $\frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} = 1.$

Oduzimajući redom sve tri jednadžbe od prethodne dobijemo:

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{yz} = \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{xz} = \frac{1}{3}.$$

Slijedi da je

$$x \cdot y = 2, \quad y \cdot z = 6, \quad x \cdot z = 3.$$

Pomnožimo prethodne jednadžbe i dobijemo $xyz = 6$.

Sad je

$$\frac{xyz}{yz} = \frac{6}{6} = 1,$$

odnosno $x = 1$. **Na isti način dobijemo** $y = 2$ **i** $z = 3$.

Zadatak 2. Dokažite da za sve realne brojeve a, b **i** c, **za koje je** $a + b + c = 0$ **vrijedi:**

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \cdot \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} = \frac{a^5 + b^5 + c^5}{5}.$$

RJEŠENJE:

Iz uvjeta imamo $a + b = -c$. **Prvo dobiveni izraz kvadriramo**

$$(a+b)^2 = c^2$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 2c^2 - 2ab$$
$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = c^2 - ab$$

a zatim kubiramo

$$(a+b)^3 = -c^3$$
$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = -c^3$$
$$a^3 + b^3 + c^3 = -3ab\underbrace{(a+b)}_{-c}$$
$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$
$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} = abc$$

Množenjem ova dva izraza dobijemo lijevu stranu

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3+c^3}{3} = abc(c^2 - ab).$$

Isto uradimo sa desnom stranom

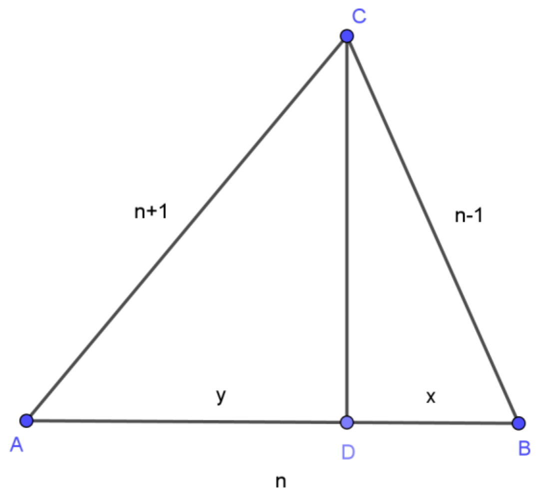
$$(a+b)^5=-c^5$$
$$(a^2+2ab+b^2)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)=-c^5$$
$$a^5+b^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4=-c^5$$
$$a^5+b^5+c^5=-5ab(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3)$$
$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=-ab\left[\Big(\underbrace{a+b}_{-c^3}\Big)^3-ab\Big(\underbrace{a+b}_{-c}\Big)\right]=abc(c^2-ab)$$

što je i trebalo dokazati.

<u>**Zadatak 3.**</u> **Duljine stranica trokuta su tri uzastopna prirodna broja. Dokazati da visina trokuta povučena na stranicu srednje duljine dijeli tu stranicu na dijelove čija je razlika 4.**

<u>RJEŠENJE</u>:

Neka je $v=|\overline{CD}|$ visina koja odgovara stranici $\overline{AB}$, srednjoj po duljini (slika) i neka su x i y odsječci na koje točka D dijeli stranicu $\overline{AB}$.



Duljine stranica $\overline{AC},\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ su redom $n+1,n,n-1$. Tada je

$$x+y=n.$$

Iz pravokutnih trokuta ACD i BCD slijedi da je

$$(n+1)^2-y^2=v^2$$

i

$$(n-1)^2-x^2=v^2.$$

Slijedi da je

$$(n+1)^2-y^2=(n-1)^2-x^2,$$

odnosno

$$(n+1)^2-(n-1)^2=y^2-x^2,$$

$$(y-x)(y+x)=4n.$$

Kako je $x + y = n$, slijedi da je

$$(y - x)n = 4n,$$

$$y - x = 4.$$

__Zadatak 4__. **Kocka sira dimenzija $3x3x3$ podijeljena je na 27 jediničnih kocki. Miš gricka sir tako što jede jedinične kocke jednu za drugom, ali tako da poslije pojedene jedne jedinične kocke prelazi na njoj susjednu. Dvije jedinične kocke su susjedne ako imaju zajedničku stranu. Može li miš pojesti sav sir tako što će otpočeti sa jediničnom kockom koja sadrži jedan vrh kocke $3x3x3$, a završiti sa jediničnom kockom koja se nalazi u sredini?**

__RJEŠENJE__: **Sve jedinične kocke, na koje je podijeljen sir, raspoređene su u tri sloja – nazovimo ih gornji, srednji i donji. Označimo jedinične kocke brojevima 1 i 0 na sljedeći način: središnju kocku označimo sa 1, a ostale numeriramo tako da su svake dvije susjedne označene različitim brojevima (dvije kocke su susjedne ako imaju zajedničku stranu). Tada u srednjem sloju imamo 5 kocki označenih sa 1 i 4 kocke označene sa 0 (slika 1).**

1	**0**	**1**
0	**1**	**0**
1	**0**	**1**

Slika 1. Oznake na kockama u srednjem sloju

U gornjem i donjem sloju imamo po 4 kocke označene sa 1 i po 5 kocki označenih sa 0 (slika 2). Znači, ukupan broj jediničnih kocki označenih sa 1 je 13, a ukupan broj kocki označenih sa 0 je 14. Pri tome, jedinične kocke koje sadrže vrhove kocke dimenzija $3x3x3$ označene su sa 0.

0	**1**	**0**
1	**0**	**1**
0	**1**	**0**

Slika 2. Oznake na kockama u gornjem i donjem sloju

Ako miš jede jedinične kocke u nizu polazeći od vrha, tako da uvijek prelazi na susjednu, onda je niz od 27 brojeva kojima smo označili jedinične kocke oblika 0101…010, tj.niz mora završiti 0. Ako bi miš mogao pojesti sir tako da pođe od vrha i završi u središnjoj jediničnoj kocki, niz bi morao početi nulom a završiti jedinicom, što je kontradikcija u odnosu na dobiveni niz. Znači, nije moguće da miš pojede sir na taj način.

2. RAZRED

Zadatak 1. Odrediti realni broj α takav da vrijedi

$$\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2-a^2}}\right)^{-2}=\left(\frac{m}{n}\right)^{\alpha}$$

ako je $x=\sqrt{\frac{m^2+n^2}{2mn}}$, $a>0, m>0, n>m$.

RJEŠENJE:

Uvrstimo izraz za x u $\sqrt{x^2+a^2}$ i $\sqrt{x^2-a^2}$ te dobijemo

$$\sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}+1\right)}=\sqrt{a^2\frac{(m+n)^2}{2mn}}=\frac{a(m+n)}{\sqrt{2mn}}$$

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}-1\right)}=\sqrt{a^2\frac{(m-n)^2}{2mn}}=\frac{a|m-n|}{\sqrt{2mn}}=\frac{a(n-m)}{\sqrt{2mn}}.$$

Dobivene izraze uvrstimo u početnu jednakost

$$\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2-a^2}}\right)^{-2}=\left[\frac{\frac{a(m+n)}{\sqrt{2mn}}+\frac{a(n-m)}{\sqrt{2mn}}}{\frac{a(m+n)}{\sqrt{2mn}}-\frac{a(n-m)}{\sqrt{2mn}}}\right]^{-2}=\left(\frac{m+n+n-m}{m+n-(n-m)}\right)^{-2}$$
$$=\left(\frac{n}{m}\right)^{-2}.$$

Konačno

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{2}=\left(\frac{m}{n}\right)^{\alpha}$$

pa slijedi da je $\alpha=2$.

Zadatak 2. Riješite sustav jednadžbi $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^2y+2xy^2+y^3=2 \end{cases}.$

RJEŠENJE:

Uvedimo smjenu $x = zy$. Dobijemo

$$\begin{cases} z^3y^3 + y^3 = 1 \\ z^2y^3 + 2zy^3 + y^3 = 2 \end{cases}.$$

Nakon faktorizacije imamo

$$\begin{cases} y^3(z^3 + 1) = 1 \\ y^3(z^2 + 2z + 1) = 2 \end{cases}.$$

Podijelimo prethodne dvije jednadžbe i dobijemo

$$\frac{z^3 + 1}{z^2 + 2z + 1} = \frac{1}{2}.$$

Uz uvjet da je $z \neq -1$ izraz postaje

$$\frac{z^2 - z + 1}{z + 1} = \frac{1}{2}$$

$$2z^2 - 3z + 1 = 0.$$

Rješenja kvadratne jednadžbe su $z_1 = 1$ i $z_2 = \frac{1}{2}$.

Za $z_1 = 1$, dobijemo da je $x = y$, odnosno $2x^3 = 1$, $x = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$.
Za $z_2 = \frac{1}{2}$, dobijemo da je $x = \frac{y}{2}$, odnosno $x = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$.

Konačno, rješenja sustava su $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}, \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$ i $\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3}, \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}\right)$.

<u>Zadatak 3.</u> Odredite polinom 3.stupnja s realnim koeficijentima tako da vrijedi

$$P(1 - i) = 2 + i, \quad P(i) = 1 - 2i.$$

RJEŠENJE:

Neka je traženi polinom $P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$, gdje su brojevi $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Prema uvjetima vrijedi

$$\begin{gathered}\boldsymbol{P(1-i)=a(1-i)^3+b(1-i)^2+c(1-i)+d=}\\ \boldsymbol{=-2a+c+d+i(-2a-2b-c)=2+i}\end{gathered}$$

$$\boldsymbol{P(i)=ai^3+bi^2+ci+d=-b+d+i(-a+c)=1-2i}$$

Sad imamo sustave

$$\begin{cases}-2a+c+d=2\\-2a-2b-c=1\end{cases} \textbf{ i } \begin{cases}-b+d=1 & \Rightarrow\ d=b+1\\ -a+c=-2 & \Rightarrow\ c=a-2\end{cases}$$

Supstitucijom dobijemo

$$\begin{cases}-a+b=3\\-3a-2b=-1\end{cases}$$

te su rješenja $\boldsymbol{a=-1, b=2, c=-3, d=3}$**, odnosno traženi polinom je**

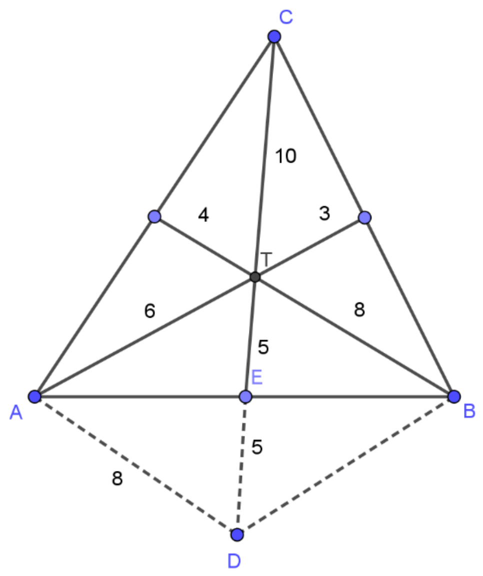
$$\boldsymbol{P(z)=-z^3+2z^2-3z+3.}$$

<u>Zadatak 4</u>**. Duljine težišnica trokuta ABC su $\boldsymbol{t_a=9}$, $\boldsymbol{t_b=12}$ i $\boldsymbol{t_c=15}$. Kolika je duljina one stranice trokuta ABC kojoj odgovara najdulja težišnica.**

<u>RJEŠENJE</u>:

Težište T dijeli težišnice na dva dijela u omjeru 2 : 1, računajući od vrha trokuta. Da bi odredili duljinu stranice $\overline{AB}$, produžimo težišnicu $\overline{CE}$ preko vrha E za 5 cm (slika).

$$\left.\begin{gathered}|BE|=|AE|=\frac{1}{2}|AB|\\ |ET|=|DE|=5cm\\ |\sphericalangle AED|=|\sphericalangle BET|\end{gathered}\right\} \overset{SKS}{\Longrightarrow} \Delta BTE\cong\Delta ADE$$



Slijedi da je $|AD| = 8cm$.

ΔADT ima stranice duljina 6cm, 8cm i 10cm, pa je pravokutan ($6^2 + 8^2 = 10^2$, s pravim kutom $\sphericalangle DAT$.

Prema tome, četverokut ADBT je pravokutnik kojemu je stranica $\overline{AB}$ dijagonala, a pošto su u pravokutniku dijagonale jednakih duljina, slijedi da je $|DT| = |AB| = 10cm$.

3. RAZRED

Zadatak 1. Riješite jednadžbu

$$log_3 x \cdot log_4 x \cdot log_5 x = log_3 x \cdot log_4 x + log_4 x \cdot log_5 x + log_5 x \cdot log_3 x.$$

RJEŠENJE:

Jednadžba ima uvjet $x > 0$. Zapišimo logaritme iz jednadžbe kao dekadske logaritme

$$\frac{logx}{log3} \cdot \frac{logx}{log4} \cdot \frac{logx}{log5} = \frac{logx}{log3} \cdot \frac{logx}{log4} + \frac{logx}{log4} \cdot \frac{logx}{log5} + \frac{logx}{log5} \cdot \frac{logx}{log3}.$$

Sada imamo

$$\frac{log^3 x}{log3 log4 log5} = \frac{log^2 x}{log3 log4} + \frac{log^2 x}{log4 log5} + \frac{log^2 x}{log5 log3}$$

$$log^3 x = log5 \cdot log^2 x + log3 \cdot log^2 x + log4 \cdot log^2 x$$

$$log^3 x - log^2 x(log5 + log3 + log4) = 0$$

$$log^2 x(logx - log60) = 0$$

Iz zadnje jednadžbe slijedi da je $log^2 x = 0$, $x_1 = 1$ i $logx = log60$, $x_2 = 60$.

Zadatak 2. **Odrediti rješenja sustava jednadžbi, uz uvjet** $x, y \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$

$$\begin{cases} cosx = 2cos^3 y \\ sinx = 2sin^3 y \end{cases}.$$

RJEŠENJE:

Zbog uvjeta $x, y \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ **je** $sinx, siny \neq 0$**, pa je sustav ekvivalentan sa**

$$\frac{cosx}{cosy} = 2cos^2 y$$
$$\frac{sinx}{siny} = 2sin^2 y$$

Zbrajanjem prethodne dvije jednadžbe dobijemo

$$\frac{sinxcosy + cosxsiny}{sinycosy} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin(x+y)}{sinycosy} = 2\,,$$

odnosno

$$sin(x+y) = sin2y.$$

Sada imamo $2sin\frac{x-y}{2}cos\frac{x+3y}{2} = 0$**.**

Za $sin\frac{x-y}{2} = 0 \Leftrightarrow x = y$**, iz polazne jednadžbe imamo** $sinx = 2sin^3 x \Leftrightarrow sinx = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$ $x = \frac{\pi}{4}, \quad (sinx > 0), \quad y = \frac{\pi}{4}$**.**

Za $cos\frac{x+3y}{2} = 0 \Leftrightarrow x + 3y = \pi$**, iz polazne jednadžbe imamo** $siny = 2sin^3 y \Leftrightarrow$ $siny = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4}, \quad (siny > 0), \quad x = \frac{\pi}{4}$**.**

Znači, jedino rješenje je $x = y = \frac{\pi}{4}$**.**

Zadatak 3. **Riješiti nejednadžbu**

$$4^{x-\frac{5}{2}+\sqrt{x^2-4}} + 2^{2x-6+2\sqrt{x^2-4}} \geq 3^{x-3+\sqrt{x^2-4}} + 3^{x-2+\sqrt{x^2-4}}.$$

RJEŠENJE:

Uvedemo smjenu $x - 3 + \sqrt{x^2-4} = t$**, pa imamo**

$$4^{t+\frac{1}{2}} + 4^t \geq 3^t + 3^{t+1}.$$

$$4^t\left(4^{\frac{1}{2}} + 1\right) \geq 3^t(1+3)$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^t \cdot 3 \geq 4$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^t \geq \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad t \geq 1$$

Vratimo smjenu, te imamo

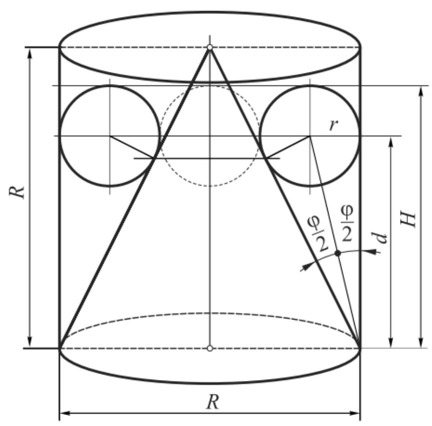
$$x - 3 + \sqrt{x^2 - 4} \geq 1.$$

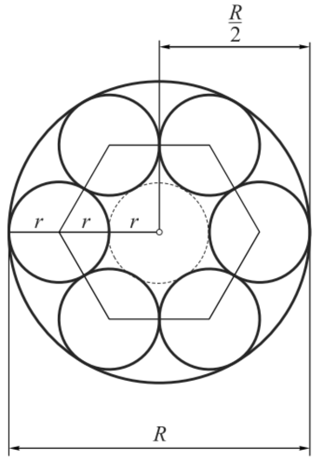
Uz uvjet da $x \in \langle -\infty, -2] \cup [2, +\infty\rangle$,

$$x \geq \frac{5}{2}.$$

<u>Zadatak 4</u> Visina posude valjkastog oblika jednaka je promjeru baze. U posudu je prvo smješten uspravni stožac, čiji su polumjer baze i visina jednaki odgovarajućim veličinama valjka, a zatim i šest loptica jednakog polumjera. Svaka loptica dodiruje posudu, plast stošca i dvije susjedne loptice. Da li loptice jednim svojim dijelom izlaze iz posude?

<u>RJEŠENJE</u>: Loptice smještene u prostoru, gledano u poprečnom presjeku odozgo, prikazane su na donjoj slici desno.





Sa slike je očito $3r = \frac{R}{2}$, odakle je $r = \frac{R}{6}$. Sa slike lijevo imamo $tg\varphi = \frac{\frac{R}{2}}{R} = \frac{1}{2}$. Također je $tg\frac{\varphi}{2} = \frac{r}{d}$, odakle je $d = \frac{r}{tg\frac{\varphi}{2}}$. Nadalje, iz formule $tg\varphi = \frac{2tg\frac{\varphi}{2}}{1-tg^2\frac{\varphi}{2}}$, uz $tg\varphi = \frac{1}{2}$, slijedi jednadžba $tg^2\frac{\varphi}{2} + 4tg\frac{\varphi}{2} - 1 = 0$, čija su rješenja $\left(tg\frac{\varphi}{2}\right)_{1,2} = -2 \pm \sqrt{5}$.

Iz geometrijskih razloga, jedino prihvatljivo rješenje je $tg\frac{\varphi}{2} = \sqrt{5} - 2$. Loptice dosežu visinu H koja u ovisnosti o promjeru baze R iznosi

$$H = d + r = \frac{r}{tg\frac{\varphi}{2}} + r = \frac{\frac{R}{6}}{\sqrt{5}-2} + \frac{R}{6} = \frac{R}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{5}-2} + 1\right) = \frac{R}{6} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-2}$$

Odakle, racionalizacijom posljednjeg razlomka dobivamo

$$H = \frac{R}{6}\left(\sqrt{5}+3\right) > \frac{R}{6}(3+3) = R,$$

tj. loptice ne izlaze izvan posude niti jednim svojim dijelom.

4. RAZRED

Zadatak 1. Odredite ona rješenja jednadžbe

$$(1-i)z^4 + (1+i)z = 0,$$

$z \in \mathbb{C}$, koja zadovoljavaju uvjet $|z - 1 + i| \leq \frac{3}{2}$.

RJEŠENJE:

a) $z_1 = 0$

b) $z = \sqrt[3]{-\frac{1+i}{1-i}} = \sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1}\left(cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3} + isin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}\right), k = 0, 1, 2.$

Rješenja su

$$z_2 = cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2} = i$$
$$z_3 = cos\frac{7\pi}{6} + isin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$
$$z_4 = cos\frac{11\pi}{6} + isin\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

Uvjet $|z-1+i| \leq \frac{3}{2}$ zadovoljavaju:

$$z_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad |0-1+i| \leq \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} \ \leq \frac{3}{2}$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \left|\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) + \frac{1}{2}i\right| \leq \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2-\sqrt{3}} \ \leq \frac{3}{2}$$

<u>Zadatak 2</u>. Ako $sin(\beta+\gamma-\alpha)$, $sin(\gamma+\alpha-\beta)$, $sin(\alpha+\beta-\gamma)$ čine aritmetički niz, dokažite da i $tg\alpha, tb\beta, tg\gamma$ također čine aritmetički niz.

<u>RJEŠENJE</u>:

Pođimo od pretpostavke

$$sin(\beta+\gamma-\alpha) - sin(\gamma+\alpha-\beta) = sin(\gamma+\alpha-\beta) - sin(\alpha+\beta-\gamma)$$

Pomoću adicijskih formula transformirajmo izraz

$$sin(\beta+\gamma)cos\alpha - cos(\beta+\gamma)sin\alpha - (sin(\gamma+\alpha)cos\beta - cos(\gamma+\alpha)sin\beta) =$$
$$= sin\gamma cos(\alpha-\beta) + cos\gamma sin(\alpha-\beta) - (sin(\alpha+\beta)cos\gamma - cos(\alpha+\beta)sin\gamma)$$

Nakon sređivanja dobijemo

$$cos\gamma sin\beta cos\alpha - cos\gamma cos\beta sin\alpha = cos\alpha sin\gamma cos\beta - cos\alpha cos\gamma sin\beta.$$

Dijeljenjem sa $cos\alpha cos\beta cos\gamma$ dobijemo

$$tg\beta - tg\alpha = tg\gamma - tg\beta,$$

Što je i trebalo dokazati.

<u>Zadatak 3.</u> Riješite jednadžbu

$$tgx + 6ctgx = \sqrt{\frac{1}{cos^2x} - 1} - 4\sqrt{3}.$$

<u>RJEŠENJE</u>:

Izraz pod korijenom zapišimo u obliku $\frac{1}{cos^2x} - 1 = \frac{sin^2x}{cos^2x} = tg^2x$.

Zadana jednadžba je ekvivalentna sa

$$tgx + 6ctgx = |tgx| - 4\sqrt{3}.$$

Razmotrimo moguće slučajeve.

1) **Ako je $tgx > 0$, tada jednadžba ima oblik**

$$ctgx = -\frac{2\sqrt{3}}{3},$$

   odnosno slijedi da je $ctgx < 0$, p bi trebalo biti i $tgx < 0$, što je kontradikcija.

2) **Dakle, mora biti $tgx < 0$, odakle slijedi**

$$2tgx + 6ctgx + 4\sqrt{3} = 0.$$

   Množenjem sa $\frac{tgx}{2}$, dobijemo jednadžbu

$$tg^2x + 2\sqrt{3}tgx + 3 = 0$$

$$\left(tgx + \sqrt{3}\right)^2 = 0$$

$$tgx = -\sqrt{3}$$

   Rješenje jednadžbe je

$$x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

<u>Zadatak 4.</u> Naći sve funkcije $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, takve da vrijedi

$$f(yf(x+y) + f(x)) = 4x + 2yf(x+y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

<u>RJEŠENJE</u>:

Uvrštavajući $y = 0$ dobijemo

$$f\big(f(x)\big) = 4x, \qquad \textbf{(1)}$$

iz čega slijedi da je f bijektivna funkcija. Također nalazimo da je

$$f(0) = f(4 \cdot 0) = f\left(f\big(f(0)\big)\right) = 4f(0),$$

stoga je $f(0)$ =0.

Sada, uvrštavajući $x = 0$ i $y = 1$ u zadanu jednadžbu i koristeći (1) dobijemo

$$4 = f\big(f(1)\big) = 2f(1),$$

te je $f(1) = 2$ i zbog toga je

$$f(2) = f(f(1)) = 4.$$

Konačno uvedemo supstituciju $y = 1 - x$ u jednadžbu:

$$f(2(1 - x) + f(x)) = 4x + 4(1 - x) = 4 = f(2), \quad \textbf{za sve } x \in \mathbb{R}.$$

Kako je f injekcija, iz ovog slijedi da je $f(x) = 2 - 2(1 - x) = 2x$.

Lako se može provjeriti da funkcija zadovoljava postavljenu jednadžbu. Zbog toga je jedino rješenje funkcija definirana sa

$$f(x) = 2x, \quad \textbf{za sve } x \in \mathbb{R}.$$

ZADATKE PRIPREMILA

dr. IVANA ZUBAC

NATJECATELJSKA KOMISIJA – SŠ

1. **MARINKO ANTUNOVIĆ, prof.**
2. **Dr. IVANA ZUBAC**

REZULTATI

NATJECANJA IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBIH

Visoko, 5. travnja 2025.

I. razred

1. **Marko Crnjak – Gimnazija Mostar**
2. **Lemana Smajić – Franjevačka klasična gimnazija Visoko**
3. **Nikola Goluža – Gimnazija fra Grge Martića Mostar**

II. razred

1. **Roko Lucić – ŠC fra Martina Nedića Orašje**
2. **Ilijan Berić – Gimnazija Livno**
3. **Leon Rajič Kozarić – Gimnazija fra Grge Martića Mostar**

III. razred

1. **Ante Penava – Gimnazija fra Grge Martića Posušje**
2. **Matea Čuljak – SŠ Čapljina**
3. **Filip Alerić – Gimnazija Mostar**

IV. razred

1. **Dragan Boban – Gimnazija fra Grge Martića Mostar**
2. **Marko Antunović – Tehničko-obrtnička škola KŠC „Don Bosco“ Žepče**
3. **Petra Lasić – Gimnazija Mostar**

POPIS UČENIKA KOJI SU SE PLASIRALI NA MATEMATIČKU OLIMPIJADU BIH

Visoko, 18. i 19. svibnja 2024.

1. **Marko Crnjak – Gimnazija Mostar**
2. **Lemana Smajić – Franjevačka klasična gimnazija Visoko**
3. **Roko Lucić – ŠC fra Martina Nedića Orašje**
4. **Ilijan Berić – Gimnazija Livno**
5. **Ante Penava – Gimnazija fra Grge Martića Posušje**
6. **Matea Čuljak – SŠ Čapljina**
7. **Filip Alerić – Gimnazija Mostar**
8. **Dragan Boban – Gimnazija fra Grge Martića Mostar**
9. **Marko Antunović – Tehničko-obrtnička škola KŠC „Don Bosco“ Žepče**
10. **Petra Lasić – Gimnazija Mostar**

ŽUPANIJSKA NATJECANJA IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA HNŽ, ZHŽ, PŽ I HBŽ

VIII. i IX. razreda održana su 11. travnja 2025. (Mostar, Ljubuški, Bok i Livno)

VI. i VII. razreda održano je 23. svibnja 2025. (Čapljina, Kočerin, Tolisa i Zabrišće)

PROGRAM NATJECANJA 11. TRAVNJA

Do 12:00	**Dolazak sudionika natjecanja u zgradu škole domaćina**
12:45	**Otvaranje natjecanja**
13:00-14:30	**Natjecanje učenika – izrada zadataka**
14:00-16:00	**Rad komisija – pregled učeničkih radova**
16:00	**Neslužbeni rezultati natjecanja (pod šiframa)**
16:30	**Službeni rezultati natjecanja, dodjela diploma i nagrada najuspješnijim učenicima**

PROGRAM NATJECANJA 23. SVIBNJA

Do 12:00	**Dolazak sudionika natjecanja u zgradu škole domaćina**
12:45	**Otvaranje natjecanja**
13:00-14:30	**Natjecanje učenika – izrada zadataka**
14:00-16:00	**Rad komisija – pregled učeničkih radova**
16:00	**Neslužbeni rezultati natjecanja (pod šiframa)**
16:30	**Službeni rezultati natjecanja, dodjela diploma i nagrada najuspješnijim učenicima**

Z A D A C I

8 . RAZRED

1. **Odredite 3 racionalna broja koja su manja od $-\frac{5}{12}$ i veća od $-\frac{1}{2}$, a kojima su brojnik i nazivnik relativno prosti brojevi (njihov najveći zajednički djelitelj je 1).**

2. **Riješite jednadžbu**

$$\left[0.72-\left(10-\frac{9.919}{1.1-x}\right)\cdot 0.625\right]:0.225=0.7.$$

3. **Cijena TV uređaja pojeftinila je 3 puta za redom po 10%. Kolika je bila početna cijena, ako je cijena nakon pojeftinjenja 2187 KM.**

4. **Pomiješa li se $8\ l$ vruće i $2\ l$ hladne vode, dobije se $10\ l$ vode kojoj je temperatura 66℃. Ako se pomiješa $7\ l$ vruće i $3\ l$ hladne vode, dobije se $10\ l$ vode kojoj je temperatura 59℃. Kolika je temperatura vruće, a kolika hladne vode?**

9 . RAZRED

1. **Rješenje jednadžbe**

$$\frac{\frac{2}{3}x-1}{6}-\frac{\frac{3}{5}x+7}{8}=\frac{\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}}{5}-2\frac{1}{2}$$

je duljina dijagonale kvadrata izražena u cm. Koliki je opseg tog kvadrata?

2. **Riješite sustav jednadžbi** $\begin{cases}\frac{2}{x-y}+\frac{6}{x+y}=\frac{11}{10}\\ \frac{4}{x-y}-\frac{9}{x+y}=\frac{1}{10}\end{cases}.$

3. **Osnovice trapeza jednake su 18 cm i 16 cm, a visina 9 cm. Kolika je udaljenost sjecišta S produženih krakova trapeza od kraće osnovice?**

4. **U jednadžbi linearne funkcije $f(x)=\frac{5-|m|}{3}x+3$ odredite vrijednost parametra m, tako da graf te funkcije bude usporedan sa pravcem zadanim jednadžbom**

$\frac{x-2}{9}-\frac{1-y}{27}=1.$

R J E Š E N J A

<u>8. RAZRED</u>

<u>Zadatak 1.</u> Odredite 3 racionalna broja koja su manja od $-\frac{5}{12}$ i veća od $-\frac{1}{2}$, a kojima su brojnik i nazivnik relativno prosti brojevi (njihov najveći zajednički djelitelj je 1).

<u>RJEŠENJE</u>:

Pošto vrijedi $-\frac{1}{2} < a < -\frac{5}{12}$, prvo proširimo prvi razlomak tako da ima isti nazivnik kao drugi razlomak

$$-\frac{6}{12} < a < -\frac{5}{12}. \tag{1}$$

Proširivanjem izraza (1) sa 2 dobijemo

$$-\frac{12}{24} < a < -\frac{10}{24},$$

pa je jedno rješenje $-\frac{11}{24}$.

Ponovimo postupak proširujući razlomke iz izraza (1) sa 3 i dobijemo

$$-\frac{18}{36} < a < -\frac{15}{36},$$

te dobijemo sljedeće rješenje $-\frac{17}{36}$.

I konačno proširujući sa 4 dobijemo izraz

$$-\frac{24}{48} < a < -\frac{20}{48},$$

i treće rješenje $-\frac{23}{48}$.

Zadatak 2. **Riješite jednadžbu**

$$\left[\mathbf{0.72}-\left(\mathbf{10}-\frac{\mathbf{9.919}}{\mathbf{1.1}-x}\right)\cdot\mathbf{0.625}\right]:\mathbf{0.225}=\mathbf{0.7}.$$

RJEŠENJE: Koristeći definicije računskih operacija, imamo

$$\mathbf{0.72}-\left(\mathbf{10}-\frac{\mathbf{9.919}}{\mathbf{1.1}-x}\right)\cdot\mathbf{0.625}=\mathbf{0.7}\cdot\mathbf{0.225}$$

$$\mathbf{0.72}-\left(\mathbf{10}-\frac{\mathbf{9.919}}{\mathbf{1.1}-x}\right)\cdot\mathbf{0.625}=\mathbf{0.1575}$$

$$\left(\mathbf{10}-\frac{\mathbf{9.919}}{\mathbf{1.1}-x}\right)\cdot\mathbf{0.625}=\mathbf{0.72}-\mathbf{0.1575}$$

$$\left(\mathbf{10}-\frac{\mathbf{9.919}}{\mathbf{1.1}-x}\right)\cdot\mathbf{0.625}=\mathbf{0.5625}$$

$$\mathbf{10}-\frac{\mathbf{9.919}}{\mathbf{1.1}-x}=\mathbf{0.5625}:\mathbf{0.625}$$

$$\mathbf{10}-\frac{\mathbf{9.919}}{\mathbf{1.1}-x}=\mathbf{0.9}$$

$$\frac{\mathbf{9.919}}{\mathbf{1.1}-x}=\mathbf{9.1}$$

$$\mathbf{1.1}-x=\mathbf{9.919}:\mathbf{9.1}$$

$$\mathbf{1.1}-x=\mathbf{1.09}$$

$$x=\mathbf{1.1}-\mathbf{1.09}$$

$$x=\mathbf{0.01}$$

Zadatak 3. **Cijena TV uređaja pojeftinila je 3 puta za redom po 10%. Kolika je bila početna cijena, ako je cijena nakon pojeftinjenja 2187 KM.**

RJEŠENJE:

Ako cijenu TV uređaja prije pojeftinjenja označimo sa x, cijena poslije tri pojeftinjenja od po 10% bit će

$$\mathbf{0.9\cdot\left(0.9\cdot(0.9\cdot x)\right)=2187}$$

$$\mathbf{0.729\cdot x=2187}$$

$$\mathbf{x=2187:0.729}$$

$$\mathbf{x=3000}$$

Znači, cijena prije pojeftinjenja bila je 3000 KM.

<u>Zadatak 4</u>. **Pomiješa li se $8\ l$ vruće i $2\ l$ hladne vode, dobije se $10\ l$ vode kojoj je temperatura 66℃. Ako se pomiješa $7\ l$ vruće i $3\ l$ hladne vode, dobije se $10\ l$ vode kojoj je temperatura 59℃. Kolika je temperatura vruće, a kolika hladne vode?**

<u>RJEŠENJE</u>:

Neka je x temperatura vruće vode, a y temperatura hladne vode.
Prema uvjetima zadatka dobijemo sustav

$$\begin{cases}8x+2y=66\cdot 10\\7x+3y=59\cdot 10\end{cases}$$

$$\begin{cases}8x+2y=660\\7x+3y=590\end{cases}$$

Riješimo sustav metodom suprotnih koeficijenata množeći prvu jednadžbu s -3, a drugu s 2.

$$\begin{cases}-24x-6y=-1980\\\ \ 14x+6y=1180\end{cases}$$

Nakon zbrajanja dobijemo

$$-10x = -800$$

$$x = 80$$

Uvrštavajući u jednu od početnih jednadžbi dobijemo da je $y = 10$.

Znači, temperatura vruće vode je 80℃, a hladne 10℃.

9. RAZRED

Zadatak 1. Rješenje jednadžbe

$$\frac{\frac{2}{3}x-1}{6}-\frac{\frac{3}{5}x+7}{8}=\frac{\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}}{5}-2\frac{1}{2}$$

je duljina dijagonale kvadrata izražena u cm. Koliki je opseg tog kvadrata?

RJEŠENJE:

Nakon množenja jednadžbe sa 120 dobijemo

$$20\cdot\left(\frac{2}{3}x-1\right)-15\cdot\left(\frac{3}{5}x+7\right)=24\cdot\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)-300$$

$$\frac{40}{3}x-20-9x-105=12x+60-300$$

$$\frac{40}{3}x-9x-125=12x-240$$

Nakon množenja sa 3 dobijemo

$$40x-27x-36x=375-720$$

$$-23x=-345$$

Pa je $x = 15$, odnosno $d = 15$.

Iz formule za duljinu dijagonale kvadrata $d = a\sqrt{2}$ slijedi da je $a = \frac{d\sqrt{2}}{2} = \frac{15\sqrt{2}}{2}$, pa je opseg kvadrata

$$O = 4a = 30\sqrt{2}.$$

Zadatak 2. Riješite sustav jednadžbi $\begin{cases} \frac{2}{x-y} + \frac{6}{x+y} = \frac{11}{10} \\ \frac{4}{x-y} - \frac{9}{x+y} = \frac{1}{10} \end{cases}.$

RJEŠENJE:

Uvedemo smjenu $\frac{1}{x-y} = a$, $\frac{1}{x+y} = b$, pa sustav ima oblik $\begin{cases} 2a + 6b = \frac{11}{10} \\ 4a - 9b = \frac{1}{10} \end{cases}.$

Nakon množenja prve jednadžbe sa -2 dobijemo

$$\begin{cases} -4a - 12b = -\frac{11}{5} \\ 4a - 9b = \frac{1}{10} \end{cases}.$$

Zbrajanjem jednadžbi imamo

$$b = \frac{1}{10},$$

i nakon uvrštavanja u jednu od jednadžbi dobijemo $a = \frac{1}{4}$. Kad vratimo smjenu imamo

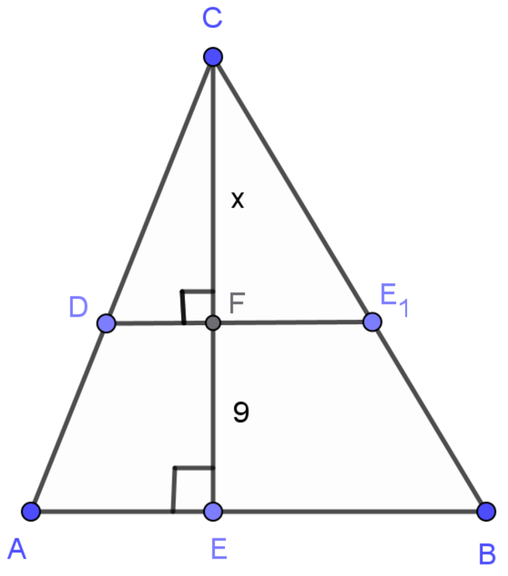
$$\begin{cases} \frac{1}{x-y} = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{x+y} = \frac{1}{10} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 10 \end{cases}.$$

Rješenja zadnjeg sustava su $x = 7$ i $y = 3$.

Zadatak 3. Osnovice trapeza jednake su 18 cm i 16 cm, a visina 9 cm. Kolika je udaljenost sjecišta S produženih krakova trapeza od kraće osnovice?

RJEŠENJE:



Neka je x tražena udaljenost.

Očito je $\Delta ABC \sim \Delta DCS$ (kutovi s paralelnim kracima).

Zato je

$$|AB|:|SE| = |DC|:|SF|,$$

tj.

$$18:(x+9) = 16:x.$$

Iz prethodne proporcije $x = 72$.

Znači, točka S udaljena je 72cm od kraće osnovice trapeza.

Zadatak 4. U jednadžbi linearne funkcije $f(x) = \frac{5-|m|}{3}x + 3$ odredite vrijednost parametra m, tako da graf te funkcije bude usporedan sa pravcem zadanim jednadžbom $\frac{x-2}{9} - \frac{1-y}{27} = 1$.

RJEŠENJE:

Napišimo jednadžbu pravca u eksplicitnom obliku

$$\frac{x-2}{9} - \frac{1-y}{27} = 1$$

$$3x - 6 - 1 + y = 1$$

$$y = -3x + 8$$

Znači koeficijent smjera pravca je $k = -3$.

Pošto je pravac usporedan sa grafom linearne funkcije koeficijenti smjera pravca i funkcije su jednaki, pa slijedi

$$\frac{5-|m|}{3} = -3$$

$$5-|m| = -9$$

$$-|m| = -14$$

$$|m| = 14$$

Rješenja su $m_1 = -14$ i $m_2 = 14$.

REZULTATI

županijskih natjecanja iz matematike učenika VIII. i IX. razreda osnovnih škola HNŽ, ZHŽ, ŽP, i HBŽ održanih 11. travnja 2025.

VIII. razred **HNŽ - Mostar**

Osvojeno mjesto	**Ime i prezime učenika**	**Škola i mjesto**
I. mjesto	**Mihael Njavro**	**O.Š. kardinala Stepinca, Neum**
II. mjesto	**Ivana Marić**	**O.Š. S. S. Kranjčevića, Mostar**
III. mjesto	**Frano Domagoj Juka**	**Treća osnovna škola, Mostar**

IX. razred

I. mjesto	**Tamara Aničić**	**O.Š. A.B.Šimića, Mostar**
II. mjesto	**Slavo Vidak Azinović**	**O.Š. Petra Bakule, Mostar**
III. mjesto	**Marko Knežević**	**O.Š. Petra Bakule, Mostar**

VIII. razred **ZHŽ - Ljubuški**

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Nikola Vlašić	O.Š. fra Stipana Vrljića, Sovići
II. mjesto	Sara Sabljić	O.Š. Kočerin, Kočerin
III. mjesto	Tamara Matić	O.Š. Ivane Brlić - Mažuranić, Ljubuški

IX. razred

I. mjesto	Marko Dugandžić	O.Š. Ivane Brlić - Mažuranić, Ljubuški
II. mjesto	Marija Galić	O.Š. Kočerin, Kočerin
III. mjesto	Petra Musa	O.Š. Kočerin, Kočerin

VIII. razred **HBŽ - Livno**

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Ivan Omazić	O.Š. fra Lovro Karaula, Podhum
II. mjesto	Matej Pavić	O.Š. Ivan Goran Kovačić, Livno
III. mjesto	Pere Mašić	O.Š. Ivana Mažuranića, Tomislavgrad

IX. razred

I. mjesto	Petar Ivić	O.Š. fra Miroslava Džaje, Kupres
II. mjesto	Helena Petraković	O.Š. „Drvar“, Drvar
III. mjesto	Luka Mišković	O.Š. Ivan Goran Kovačić, Livno

VIII. razred **ŽP - Bok**

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Ana Marković	O.Š. Stjepana Radića u Boku
II. mjesto	Ajla Smajlović	O.Š. Orašje, Orašje
III. mjesto	Mihael Nedić	O.Š. fra Ilije Starčevića, Tolisa

IX. razred

I. mjesto	Frano Ćulap	O.Š. Vladimira Nazora, Odžak
II. mjesto	Iva Mišković	O.Š. Braće Radića, Domaljevac
III. mjesto	Magdalena Džebić	O.Š. Braće Radića, Domaljevac

POPIS UČENIKA KOJI SU SE PLASIRALI NA JUNIORSKU MATEMATIČKU OLIMPIJADU BIH

Visoko, 1. lipnja 2025.

1. **Mihael Njavro - O.Š. kardinala Stepinca, Neum**
2. **Tamara Aničić - O.Š. A.B.Šimića, Mostar**
3. **Nikola Vlašić - O.Š. fra Stipana Vrljića, Sovići**
4. **Marko Dugandžić - O.Š. Ivane Brlić - Mažuranić, Ljubuški**
5. **Ivan Omazić - O.Š. fra Lovro Karaula, Podhum**
6. **Petar Ivić - O.Š. fra Miroslava Džaje, Kupres**
7. **Ana Marković - O.Š. Stjepana Radića u Boku**
8. **Frano Ćulap - O.Š. Vladimira Nazora, Odžak**

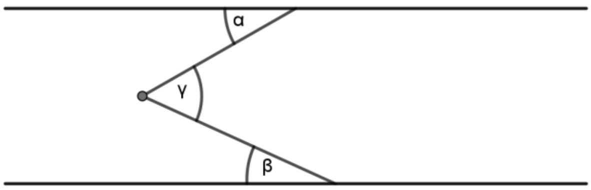
Z A D A C I

6 . RAZRED

1. **Magični kvadrat 3x3 je takav kvadrat kod kojeg se zbrajanjem po tri broja u svim smjerovima (horizontalno, vertikalno i dijagonalno) dobija uvijek isti broj. Popuniti prazna polja u kvadratu da bi kvadrat bio magičan.**

	21	14
		19
20		

2. **Zadani su kutovi $\alpha = 42°54'$ i $\beta = 35°37'$. Odrediti veličinu kuta γ (slika) ako su pravci a i b usporedni.**



3. **Odrediti troznamenkasti prirodni broj koji ima oblik $\overline{abc}$, gdje je $a > b > c$, tako da vrijedi jednakost $\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 1998$.**
(Uputa: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$)

4. **Dokazati da je zbroj svih prirodnih brojeva od 1 do 1000 djeljiv sa 7. Odgovor obrazložiti!**

7 . RAZRED

1. **Odredi x iz jednadžbe**

$$\frac{9\left(1\frac{11}{10} - 0.945 : 0.9\right)}{1\frac{3}{10} - 4\frac{3}{8} : 7} = \frac{x}{10.5 \cdot 0.24 - 15.15 : 7.5}.$$

2. **Razlomak $\frac{29}{6}$ predstavite kao zbroj dva razlomka čiji su nazivnici prosti brojevi.**

.

3. **Naći zbroj svih cjelobrojnih rješenja nejednadžbe $|x+6| \leq 8$.**

4. **Jednog ljetnog mjeseca samo su četiri dana bila kišna. Zanimljivo je da su to bili prvi dan u mjesecu i tri utorka koji su imali parni datum. Odrediti koji je dan u tjednu bio prvi u tom mjesecu. Odgovor obrazložiti!**

R J E Š E N J A

6 . RAZRED

Zadatak 1. Magični kvadrat 3x3 je takav kvadrat kod kojeg se zbrajanjem po tri broja u svim smjerovima (horizontalno, vertikalno i dijagonalno) dobija uvijek isti broj. Popuniti prazna polja u kvadratu da bi kvadrat bio magičan.

	21	**14**
		19
20		

RJEŠENJE: Neka je broj u sredini kvadrata x. Tada je zbroj u svim smjerovima jednak (kao na dijagonali) $20 + x + 14 = 34 + x$.

x-1	**21**	**14**
	x	**19**
20		**x+1**

Izračunavanjem preostalih zbrojeva i uspoređivanjem sa karakterističnim zbrojem dobijemo jednadžbe:

$$34 + x - 21 - 14 = 34 + x - 35 = x - 1 \text{ (prvi red horizontalno)}$$

$$34 + x - 14 - 19 = 34 + x - 33 = x + 1 \text{ (zadnji red vertikalno)}$$

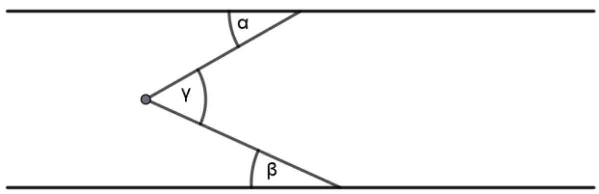
Sad imamo dijagonalu $\boldsymbol{x - 1 + x + x + 1 = 34 + x}$

$$\boldsymbol{2x = 34}$$

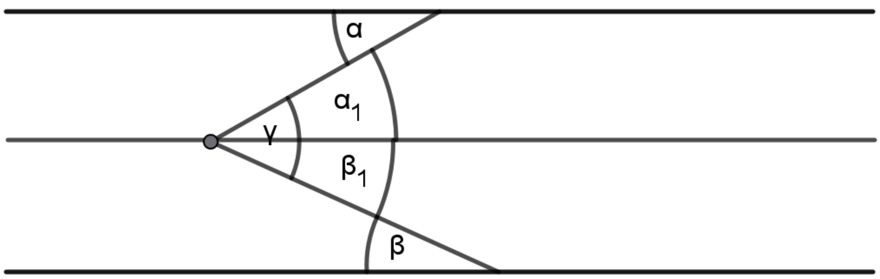
Odnosno x = 7, pa kvadrat ima rješenje:

16	**21**	**14**
15	**17**	**19**
20	**13**	**18**

<u>Zadatak 2</u>. Zadani su kutovi $\boldsymbol{\alpha = 42°54'}$ i $\boldsymbol{\beta = 35°37'}$. Odrediti veličinu kuta $\boldsymbol{\gamma}$ (slika) ako su pravci a i b usporedni.



<u>RJEŠENJE</u>: Povučemo pravac c kroz vrh kuta $\boldsymbol{\gamma}$ usporedno sa pravcima a i b.



Očigledno je $\boldsymbol{\gamma = \alpha_1 + \beta_1}$. Kako je $\boldsymbol{\alpha = \alpha_1}$ i $\boldsymbol{\beta = \beta_1}$ (kutovi sa usporednim kracima) slijedi da je

$$\boldsymbol{\gamma = \alpha + \beta = 78°31'}.$$

Zadatak 3. **Odrediti troznamenkasti prirodni broj koji ima oblik $\overline{abc}$, gdje je $a > b > c$, tako da vrijedi jednakost $\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 1998$.**
(Uputa: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$)

RJEŠENJE:
Kako je

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c$$
$$\overline{acb} = 100a + 10c + b$$
$$\overline{bac} = 100b + 10a + c$$
$$\overline{bca} = 100b + 10c + a$$
$$\overline{cab} = 100c + 10a + b$$
$$\overline{cba} = 100c + 10b + a$$

a pošto $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ slijedi

$$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 222a + 222b + 222c = 222(a + b + c).$$

Znači

$$222(a + b + c) = 1998,$$

nakon dijeljenja sa 222 dobijemo

$$a + b + c = 9.$$

Odavde, zbog $a > b > c$ slijedi da je $\overline{abc} = 531$, $\overline{abc} = 432$, $\overline{abc} = 621$.

Zadatak 4. Dokazati da je zbroj svih prirodnih brojeva od 1 do 1000 djeljiv sa 7. Odgovor obrazložiti!

RJEŠENJE: **Kako je**

$$1 + 1000 = 2 + 999 = 3 + 998 = \dots = 1001,$$

i kako takvih parova ima

$$1000 : 2 = 500,$$

to je zbroj svih prirodnih brojeva od 1 do 1000 jednak

$$\mathbf{500 \cdot 1001}.$$

Kako je $\mathbf{1001 = 11 \cdot 7 \cdot 13}$, to je traženi zbroj djeljiv sa 7.

7 . RAZRED

Zadatak 1. Odredi x iz jednadžbe

$$\frac{9\left(1\frac{11}{10} - 0.945 : 0.9\right)}{1\frac{3}{10} - 4\frac{3}{8} : 7} = \frac{x}{10.5 \cdot 0.24 - 15.15 : 7.5}.$$

RJEŠENJE:

$$\frac{9\left(\frac{21}{10} - \frac{945}{1000} \cdot \frac{10}{9}\right)}{\frac{13}{10} - \frac{35}{8} \cdot \frac{1}{7}} = \frac{x}{\frac{105}{10} \cdot \frac{24}{100} - \frac{1515}{100} \cdot \frac{10}{75}}$$

$$\frac{9\left(\frac{21}{10} - \frac{21}{20}\right)}{\frac{13}{10} - \frac{5}{8}} = \frac{x}{\frac{252}{100} - \frac{101}{50}}$$

$$\frac{9 \cdot \frac{21}{20}}{\frac{27}{40}} = \frac{x}{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{189 \cdot 40}{20 \cdot 27} = \frac{x \cdot 2}{1}$$

$$2x = 14$$

$$x = 7$$

Zadatak 2. **Razlomak $\frac{29}{6}$ predstavite kao zbroj dva razlomka čiji su nazivnici prosti brojevi.**

RJEŠENJE: Nazivnik je 6, pa kako su 2 i 3 jedini prosti brojevi čiji je umnožak 6, to je razlomak $\frac{29}{6}$ zbroj polovina i trećina.

Znači,

$$\frac{29}{6} = \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{3x + 2y}{6},$$

a odavde je

$$3x + 2y = 29.$$

Pošto je $2y$ paran broj, a 29 neparan broj, $3x$ mora biti neparan broj.

Imamo sljedeće mogućnosti

$$x = 1, y = 13; \quad x = 3, y = 10; \quad x = 5, y = 7; \quad x = 7, y = 4; \quad x = 9, y = 1.$$

Znači rješenje je

$$\begin{aligned} \frac{29}{6} &= \frac{1}{2} + \frac{13}{3} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{10}{3} \\ &= \frac{5}{2} + \frac{7}{3} \\ &= \frac{7}{2} + \frac{4}{3} \\ &= \frac{9}{2} + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Zadatak 3. **Naći zbroj svih cjelobrojnih rješenja nejednadžbe $|x + 6| \leq 8$.**

RJEŠENJE:

Prem definiciji apsolutne vrijednosti slijedi da je $|x + 6| \leq 8$ jednako

$$-8 \leq x + 6 \leq 8,$$

tj.

$$-14 \leq x \leq 2.$$

Ako je x cijeli broj slijedi

$$x \in \{-14, -13, -12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}.$$

Traženi zbroj je - 102.

<u>Zadatak 4</u>. Jednog ljetnog mjeseca samo su četiri dana bila kišna. Zanimljivo je da su to bili prvi dan u mjesecu i tri utorka koji su imali parni datum. Odrediti koji je dan u tjednu bio prvi u tom mjesecu. Odgovor obrazložiti!

<u>RJEŠENJE</u>:

Mjesec može najviše imati 31 dan. Razmak između dva utorka je 7 dana. Kada 31 podijelimo sa 7 dobijemo 4 i ostatak 3. To znači da u mjesecu može biti najviše 5 utoraka. Ako je prvi utorak parnog datuma, onda je sljedeći utorak neparnog datuma. Nakon toga sljedeći utorak opet ima parni datum itd.

Kako su u tom mjesecu bila 3 utorka s parnim datumom, morala su biti i 2 utorka s neparnim datumom. Budući da u jednom mjesecu može biti najviše 5 utoraka, tog mjeseca je bilo točno 5 utoraka. To znači da je jedan od utoraka moramo biti jedan od prva tri dana u mjesecu. Kako u tom mjesecu imamo tri utorka sa parnim datumom i dva utorka sa neparnim datumom, prvi utorak je morao imati parni datum. To znači da je mogao pasti samo na drugi dan u tom mjesecu. Dakle, prvi dan u mjesecu je bio ponedjeljak.

REZULTATI

županijskih natjecanja iz matematike učenika VI. i VII. razreda osnovnih škola HNŽ, ZHŽ, HBŽ i ŽP održanih 23. svibnja 2025.

VI. razred **HNŽ - Čapljina**

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Barbara Matić	O.Š. kardinala Stepinca, Neum
II. mjesto	Vice Kožul	O.Š. Ilići, Mostar
III. mjesto	Božo Matuško	O.Š. kardinala Stepinca, Neum

VII. razred

I. mjesto	Ana Marijanović	O.Š. Petra Bakule, Mostar
II. mjesto	Mark Munetić	O.Š. Petra Bakule, Mostar
III. mjesto	Josip Bošnjak	O.Š. Ilići, Mostar

VI. razred **ZHŽ - Kočerin**

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Jakov Mišetić	O.Š. Ivane Brlić - Mažuranić, Humac
II. mjesto	Branka Matijašević	O.Š. Ivane Brlić - Mažuranić, Gračine
III. mjesto	Marko Rudež	O.Š. A.B. i Stanislava Šimića, Tihaljina

VII. razred

I. mjesto	Željko Šimić	O.Š. Ruđera Boškovića, Grude
II. mjesto	Borna Pavlović	O.Š. Tina Ujevića, Vitina
III. mjesto	Karlo David Mucić	O.Š. Ivane Brlić - Mažuranić, Humac

VI. razred **HBŽ - Zabrišće**

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Jure Pavić	O.Š. Ivan Goran Kovačić, Livno
II. mjesto	Milica Maksić	O.Š. Drvar, Drvar
III. mjesto	Adrian Perković	O.Š. Ivan Goran Kovačić, Livno

VII. razred

I. mjesto	Anđela Šimić	O.Š. fra Miroslava Džaje, Kupres
II. mjesto	Josip Čelar	O.Š. Ivan Goran Kovačić, Livno
III. mjesto	Andrija Marković	O.Š. Ivana Mažuranića, Tomislavgrad

VI. razred **ŽP - Bok**

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Lana Kovačević	O.Š. Vladimira Nazora, Odžak
II. mjesto	Ema Ćošković	O.Š. Braće Radića, Domaljevac
III. mjesto	Benjamin Hadžiomerović	O.Š. Vladimira Nazora, Odžak

VII. razred

I. mjesto	Ruža Oršolić	O.Š. fra Ilije Starčevića, Tolisa
II. mjesto	Faris Salkanović	O.Š. Vladimira Nazora, Odžak
III. mjesto	Petar Ćošković	O.Š. Braće Radića, Domaljevac

ZADATKE PRIPREMILA

dr. IVANA ZUBAC

ŽUPANIJSKA NATJECANJA SU PROVELE:

Irena Mihaljević – ZHŽ

Nora Šesto – HBŽ

Anita Marijanović – HNŽ

Kadica Dominković – ŽP

ZAHVALJUJEMO SPONZORIMA KOJI SU POMOGLI ORGANIZIRANJE NATJECANJA MLADIH MATEMATIČARA UČENIKA OSNOVNIH I SREDNJIH ŠKOLA U BIH

Glavni sponzori:

- **JP Hrvatske telekomunikacije d.d. Mostar**
- **JP Elektroprivreda HZ-HB d.d. Mostar**

Ostali sponzori:

- **Ministarstvo znanosti, prosvjete, kulture i športa HBŽ**
- **Ministarstvo prosvjete, znanosti, kulture i športa ZHŽ**
- **Ministarstvo prosvjete, znanosti, kulture i športa PŽ**
- **Predsjednica Federacije BiH, gospođa Lidija Bradara**
- **Načelnik Općine Žepče, gospodin Mato Zovko**
- **Eagle Technology d.o.o. Žepče**
- **YUCA d.o.o. Žepče**

Posebna zahvala Franjevačkoj klasičnoj gimnaziji Visoko i ravnatelju fra. Stipi Alandžaku koji su ugostili JMOBiH kojoj smo bili domaćini.

BILTEN uredio Marinko Antunović, prof.

Lipanj, 2025.

JP ELEKTROPRIVREDA
HRVATSKE ZAJEDNICE HERCEG BOSNE d.d. Mostar

HT eronet

Veza koja traje