NATJECANJA IZ MATEMATIKE

UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA FEDERACIJE BIH

Posušje, 23. ožujka 2024.

UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA HNŽ, ZHŽ, PŽ I HBŽ

VIII. i IX. razreda održana su 12. travnja 2024. (Stolac, Tihaljina, Tolisa i Bukovica)

VI. i VII. razreda održano je 10. svibnja 2024. (Vitina, Bok i Bukovica)

BILTEN

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA

NAKLADNIK

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA

ZA NAKLADNIKA

MARINKO ANTUNOVIĆ, prof.

NAKLADA U 1000 PRIMJERAKA

SADRŽAJ

PROGRAM NATJECANJA – SREDNJE ŠKOLE

09:30	**Sastanak profesora-pratitelja učenika**
10:20	**<u>Svečano otvaranje natjecanja</u>** **Sudionike natjecanja i goste pozdravili su:** **Ante Jukić, ravnatelj Gimnazije** **Marinko Antunović, predsjednik UMRB Žepče** **Ante Begić, Načelnik općine Posušje**
10:45-13:45	**Natjecanje učenika – izrada zadataka**
13:00-15:30	**Rad komisija – pregled učeničkih radova**
12:00-15:00	**Ručak za sve sudionike natjecanja**
15:45	**Neslužbeni rezultati natjecanja (pod šiframa)**
15:45-16:15	**Reklamacije učenika-natjecatelja Natjecateljskoj komisiji**
16:30	**Proglašenje službenih rezultata natjecanja, dodjela diploma i nagrada najuspješnijim učenicima**
17:00	**Zatvaranje natjecanja**

Z A D A C I

1 . RAZRED

1. **Riješi (uz raspravu) jednadžbu $\frac{x-m}{mx-1} = 2 - \frac{1}{m}$. Za koje vrijednosti realnog parametra m rješenje jednadžbe x zadovoljava uvjet $|x| \geq 1$?**

2. **Naći sve trojke cijelih brojeva (x, y, z) koje su rješenje sustava**

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 = -18 \end{cases}.$$

3. **Dokaži da ne postoji jednakostraničan trokut kojemu su koordinate svih triju vrhova cijeli brojevi.**

4. **Pravokutni trokut rotira prvo oko kateta, a zatim oko hipotenuze. Tako dobivena tijela imaju volumene V_1, V_2, V_3 redom. Dokazati da vrijedi $\frac{1}{V_3^2} = \frac{1}{V_2^2} + \frac{1}{V_1^2}$.**

2 . RAZRED

1. **Izračunaj koliko je $z^{100} + z^{101} + z^{102} + z^{103} + z^{104}$, ako je z kompleksni broj za koji vrijedi $z + z^{-1} = 1$.**

2. **Naći realna rješenja jednadžbe**

$$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + x + x^2 + x^3 = 6.$$

3. **Dokaži da za sve brojeve $a, b, c \in \mathbb{R}$ sljedeća jednadžba ima oba realna rješenja**

$$(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0.$$

4. **Površina jednakokračnog trapeza kojemu se može upisati kružnica je P, a šiljasti kut trapeza je α. Kolika je duljina srednjice trapeza?**

3 . RAZRED

1. **Odredi sve (cjelobrojne) x, y za koje vrijedi**

$$\begin{cases} log_2 log_x(x-3y) = -1 \\ x \cdot y^{log_x y} = y^{\frac{5}{2}} \end{cases}.$$

2. **U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu**

$$2cos^2 \frac{2x+3y}{6} = 3^x + 3^{-x}.$$

3. **Duljine visina trokuta ABC odnose se kao $v_a : v_b : v_c = 6 : 2\sqrt{3} : 3$, a opseg opisane mu kružnice iznosi 8π cm. Odredi duljine stranica i veličine kutova trokuta ABC.**

4. **Dokazati da je zbroj kvadrata bilo kojih 5 uzastopnih cijelih brojeva djeljiv sa 5, a nije djeljiv sa 25.**

4. RAZRED

1. **Odredite realni parametar m, tako da jednadžba**

$$x^4 - (3m+2)x^2 + m^2 = 0$$

ima 4 rješenja koja su uzastopni članovi aritmetičkog niza.

2. **Naći sve $z \in C$ koji zadovoljavaju jednadžbu**

$$z^5 + (1+i)^{10} z = 0.$$

3. **U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu**

$$\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}\right)^2 = 2^{x-\sqrt{x}-1}.$$

4. **Dokazati da ne postoji funkcija $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, takva da vrijedi**

$$(f \circ f)(x) = \begin{cases} \sqrt{2}, & za \ \ \forall x \in \mathbb{Q} \\ 1, & za \ \ \forall x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$$

R J E Š E N J A

1. RAZRED

Zadatak 1. **Riješi (uz raspravu) jednadžbu $\frac{x-m}{mx-1} = 2 - \frac{1}{m}$. Za koje vrijednosti realnog parametra m rješenje jednadžbe x zadovoljava uvjet $|x| \geq 1$?**

RJEŠENJE:

Nakon množenja jednadžbe

$$\frac{x-m}{mx-1} = 2 - \frac{1}{m}$$

sa $m(mx-1)$, uz uvjete $m \neq 0, mx \neq 1$, dobijemo

$$m(x-m) = 2m(mx-1) - (mx-1).$$

Sređivanjem imamo

$$2mx(1-m) = (m-1)^2.$$

1) **Uz uvjet $m \neq 0, m \neq 1$ rješenje jednadžbe je**
$$x = \frac{1-m}{2m}.$$
Dodatno provjerimo uvjet, $mx \neq 1$, iz čega slijedi $\frac{1-m}{2m} \neq \frac{1}{m}$, odnosno dodatno za $m \neq -1$, jednadžba nema rješenja.
2) **Za $m = 0$ jednadžba nema rješenja.**
3) **Za $m = 1$ jednadžba je neodređena.**

Iz uvjeta $|x| \geq 1$ imamo $\left|\frac{1-m}{2m}\right| \geq 1$, odnosno sustav

$$\begin{cases} \frac{1-m}{2m} \leq -1 \\ \frac{1-m}{2m} \geq 1 \end{cases}.$$

Nakon transformacije prva nejednadžba je $\frac{1+m}{2m} \leq 0$, a njeno rješenje je $m \in [-1, 0\rangle$.
Druga nejednadžba je $\frac{1-3m}{2m} \geq 0$, a njeno rješenje je $m \in \left\langle 0, \frac{1}{3}\right]$.
Rješenje sustava je $m \in \left\langle -1, \frac{1}{3}\right] \setminus \{0\}$ (uzimajući u obzir uvjet $m \neq -1$).

Zadatak 2. **Naći sve trojke cijelih brojeva (x, y, z) koje su rješenje sustava**

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 = -18 \end{cases}.$$

RJEŠENJE:

Iz prve jednadžbe izrazimo $z = -x - y$ i uvrstimo u drugu, te dobijemo

$$x^3 + y^3 - (x + y)^3 = -18.$$

Faktorizacijom dobijemo

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) - (x + y)^3 = -18$$

$$(x + y)[x^2 - xy + y^2 - x^2 - 2xy - y^2] = -18$$

$$-3xy(x + y) = -18$$

Uvrštavanjem $(x + y) = -z$, imamo

$$xyz = -6.$$

Radi određenosti neka je $|x| \leq |y| \leq |z|$. Mora biti $|x| = 1$, inače bi bilo $|xyz| > 8$.

Apsolutne vrijednosti dva preostala broja su 1 i 6 (nemoguće radi prve jednadžbe) ili 2 i 3. Slijedi da je $x = 1, y = 2, z = -3$ i sve permutacije trojke $(1, 2, -3)$, odnosno:

$$(1, 2, -3), (1, -3, 2), (2, 1, -3), (2, -3, 1), (-3, 1, 2), (-3, 2, 1).$$

Zadatak 3. **Dokaži da ne postoji jednakostraničan trokut kojemu su koordinate svih triju vrhova cijeli brojevi.**

RJEŠENJE:

Pretpostavimo da takav trokut postoji i da su vrhovi točke $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, kojima su koordinate $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ cijeli brojevi.

Površinu tog trokuta možemo izračunati na dva načina:

1) **po formuli $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, dobit ćemo za rezultat iracionalan broj (jer je a^2 racionalan broj a $\sqrt{3}$ iracionalan broj).**

2) **po formuli $P = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$ za rezultat dobijemo racionalan broj.**

Ova proturječnost dokazuje tvrdnju postavljenu u zadatku jer broj P ne može u isto vrijeme biti i racionalan i iracionalan broj.

Zadatak 4. **Pravokutni trokut rotira prvo oko kateta, a zatim oko hipotenuze. Tako dobivena tijela imaju volumene V_1, V_2, V_3 redom. Dokazati da vrijedi $\frac{1}{V_3^2} = \frac{1}{V_2^2} + \frac{1}{V_1^2}$.**

RJEŠENJE:

Pošto je trokut pravokutan vrijedi Pitagorin poučak $c^2 = a^2 + b^2$ i formule za površinu $P = \frac{ab}{2} = \frac{cv_c}{2}$, odakle slijedi $v_c = \frac{ab}{c}$.

Rotacijom nastaju tijela koja imaju volumene:

1) **ako trokut rotira oko prve katete nastaje tijelo koje ima volumen**
$V_1 = \frac{1}{3}a^2\pi b \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{V_1^2} = \frac{9}{a^4b^2\pi^2}$

2) **ako trokut rotira oko druge katete nastaje tijelo koje ima volumen**
$V_2 = \frac{1}{3}b^2\pi a \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{V_2^2} = \frac{9}{a^2b^4\pi^2}$

3) **ako trokut rotira oko hipotenuze nastaje tijelo koje ima volumen**
$V_3 = \frac{1}{3}{v_c}^2\pi c \quad \Rightarrow \quad V_3 = \frac{a^2b^2\pi}{3c} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{V_3^2} = \frac{9c^2}{a^4b^4\pi^2}$

Zbrajanjem dobijemo

$$\frac{1}{V_2^2} + \frac{1}{V_1^2} = \frac{9}{a^4b^2\pi^2} + \frac{9}{a^2b^4\pi^2} = \frac{9(a^2 + b^2)}{a^4b^4\pi^2} = \frac{9c^2}{a^4b^4\pi^2} = \frac{1}{V_3^2}$$

što je i trebalo dokazati.

2. RAZRED

Zadatak 1. **Izračunaj koliko je $z^{100} + z^{101} + z^{102} + z^{103} + z^{104}$, ako je z kompleksni broj za koji vrijedi $z + z^{-1} = 1$.**

RJEŠENJE:

Iz uvjeta $z + \frac{1}{z} = 1$, množenjem sa z dobijemo kvadratnu jednadžbu $z^2 - z + 1 = 0$.

Rješenja jednadžbe su konjugirano kompleksni brojevi $z_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Ako izračunamo z^3 za oba rješenja dobijemo $\left(z_{1,2}\right)^3 = -1$.

Sad transformiramo zadani izraz

$$z^{100}(1 + z^1 + z^2 + z^3 + z^4) =$$

$$= -z(1 + z + z^2 - 1 + z^4)$$

$$= -z(z + z^2 + z^4)$$

$$= -z^2(1 + z + z^3)$$

$$= -z^3 = 1$$

Zadatak 2. **Naći realna rješenja jednadžbe**

$$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + x + x^2 + x^3 = 6.$$

RJEŠENJE:

Zadanu jednadžbu transformirajmo kao

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 6.$$

Uvedimo smjenu $x + \frac{1}{x} = t$, pa je

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2, \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t.$$

Smjenom se zadana jednadžba svodi na

$$t^3 + t^2 - 2t - 8 = 0.$$

Faktoriziramo lijevu stranu

$$(t^3 - 8) + t(t - 2) = 0,$$

$$(t - 2)(t^2 + 3t + 4) = 0.$$

Jedino realno rješenje prethodne jednadžbe je $t = 2$, pa je $x + \frac{1}{x} = 2$, odnosno

$$x^2 - 2x + 1 = 0,$$

i rješenje je $x = 1$.

<u>Zadatak 3.</u> **Dokaži da za sve brojeve $a, b, c \in \mathbb{R}$ sljedeća jednadžba ima oba realna rješenja**

$$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0.$$

<u>RJEŠENJE</u>:

Transformacijom zadane jednadžbe dobijemo

$$3x^2 - (2a + 2b + 2c)x + ab + ac + bc = 0.$$

Diskriminanta ove jednadžbe je

$$D = (2a + 2b + 2c)^2 - 12(ab + ac + bc)$$

$$D = 4(a + b + c)^2 - 12ab - 12ac - 12bc$$

$$D = 4a^2 - 4ab + 4b^2 - 4ac - 4bc + 4c^2$$

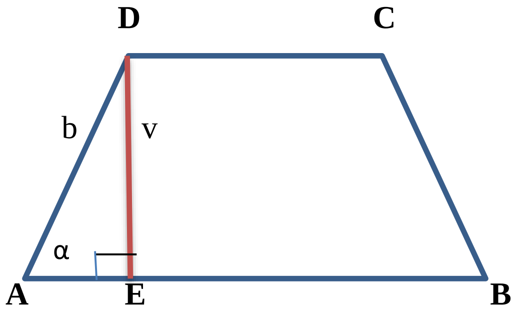
$$D = 2(a - b)^2 + 2(a - c)^2 + 2(b - c)^2 \geq 0.$$

Vrijednost diskriminante je uvijek veća ili jednaka nuli, pa su rješenja jednadžbe uvijek realni brojevi (realni i različiti ili realni i jednaki).

Zadatak 4. **Površina jednakokračnog trapeza kojemu se može upisati kružnica je P, a šiljasti kut trapeza je α. Kolika je duljina srednjice trapeza?**

RJEŠENJE:

Trapezu se može upisati kružnica, zbog čega je $a + c = 2b$, prema teoremu o tangencijalnom četverokutu.



Iz trokuta ADE slijedi da je

$$\sin\alpha = \frac{v}{b}, \text{ tj. } v = b\sin\alpha.$$

Prema tome površina trapeza jednaka je

$$P = \frac{a+c}{2}v = b \cdot v = b^2 \sin\alpha.$$

Kako je $b^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = \frac{P}{\sin\alpha}$**, slijedi da je srednjica trapeza jednaka**

$$s = \frac{a+c}{2} = \sqrt{\frac{P}{\sin\alpha}}.$$

3. RAZRED

Zadatak 1. **Odredi sve (cjelobrojne) x, y za koje vrijedi**

$$\begin{cases} \log_2 \log_x (x-3y) = -1 \\ x \cdot y^{\log_x y} = y^{\frac{5}{2}} \end{cases}.$$

RJEŠENJE:

Prvo odredimo uvjete za koje su jednadžbe definirane, $x > 0, y > 0, x \neq 1, x > 3y$. Sustav zapišemo u obliku (drugu jednadžbu logaritmiramo po bazi y):

$$\begin{cases} \log_x (x-3y) = \frac{1}{2} \\ \log_y \left(x \cdot y^{\log_x y}\right) = \log_y y^{\frac{5}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y = \sqrt{x} \\ \log_y x + \log_x y = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Iz druge jednadžbe

$$\frac{1}{\log_x y} + \log_x y = \frac{5}{2},$$

supstitucijom $\log_x y = t$ i sređivanjem dobijemo jednadžbu $2t^2 - 5t + 2 = 0$,

čija su rješenja $t_1 = 2, t_2 = \frac{1}{2}$.

Jednadžba ima rješenje za $t_2 = \frac{1}{2}$

$$\log_x y = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{x},$$

Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobijemo $x^2 = 16x$, čije je rješenje (uz poštivanje uvjeta) $x = 16$, pa je rješenje sustava uređeni par $(16, 4)$.

Zadatak 2. **U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu**

$$2cos^2\frac{2x+3y}{6}=3^x+3^{-x}.$$

RJEŠENJE:

Zbog $cos^2\frac{2x+3y}{6}\le 1$**, slijedi da je i** $\frac{3^x+3^{-x}}{2}\le 1$**, tj.**

$$3^x+3^{-x}\le 2$$

$$3^{2x}-2\cdot 3^x+1\le 0$$

$$(3^x-1)^2\le 0 \quad \Rightarrow \quad 3^x=1.$$

Rješenje je $x=0$**, koje uvrštenjem u zadanu jednadžbu daje**

$$cos^2\frac{y}{2}=1,$$

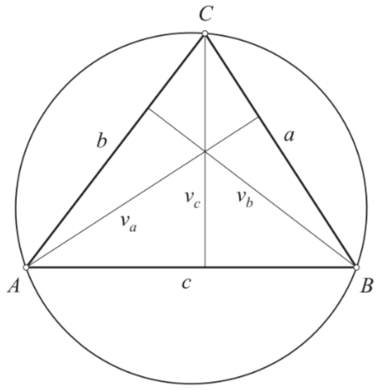
tj. $\frac{y}{2}=k\pi$**.**

Rješenje polazne jednadžbe je $x=0, y=2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}$**.**

Zadatak 3. **Duljine visina trokuta ABC odnose se kao** $v_a:v_b:v_c=6:2\sqrt{3}:3$**, a opseg opisane mu kružnice iznosi** 8π **cm. Odredi duljine stranica i veličine kutova trokuta ABC.**

RJEŠENJE:

Iz $av_a=bv_b$ **dobijemo** $a:b=v_b:v_a=2\sqrt{3}:6=1:\sqrt{3}$**, a iz**
$b:c=v_c:v_b=3:2\sqrt{3}=\sqrt{3}:2$**, tj.** $a:b:c=1:\sqrt{3}:2$**.**



Neka je $a = k, b = \sqrt{3}k, c = 2k$.

Sada je

$$cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3k^2 + 4k^2 - k^2}{2\sqrt{3} \cdot 2k^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

pa je $\alpha = 30°$. Na isti način dobijemo

$$cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \ \beta = 60°.$$

Znači, $\gamma = 90°$, pa je trokut ABC pravokutan. Polumjer opisane kružnice je $r = \frac{c}{2}$, a njen opseg $8\pi = 2r\pi$, pa je $r = 4$ i $c = 8$.

Iz $8 = 2k$, slijedi da je $k = 4$, odnosno $a = 4$, $b = 4\sqrt{3}$.

<u>Zadatak 4.</u> Dokazati da je zbroj kvadrata bilo kojih 5 uzastopnih cijelih brojeva djeljiv sa 5, a nije djeljiv sa 25.

<u>RJEŠENJE</u>:

Napišimo zbroj u obliku

$$S = (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2,$$

gdje je n cijeli broj.

Kvadriranjem izraza i zbrajanjem dobijemo

$$S = 5(n^2 + 2),$$

odakle slijedi da je zbroj djeljiv sa 5.

Da bi dokazali da zbroj nije djeljiv sa 25, treba dokazati da $n^2 + 2$ nije djeljivo sa 5 ni za jedan cijeli broj n.
Pretpostavimo suprotno, ako je $n^2 + 2$ djeljivo sa 5, broj n^2 mora imati zadnju znamneku 3 ili 8, a to je nemoguće jer ne postoji kvadrat cijelog broja koji se završava znamenkom 3 ili 8.
Prema toma, zbroj nije djeljiv sa 25.

4. RAZRED

Zadatak 1. Odredite realni parametar m, tako da jednadžba

$$x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2 = 0$$

ima 4 rješenja koja su uzastopni članovi aritmetičkog niza.

RJEŠENJE:

Kod bikvadratne jednadžbe rješenja su $-x_1, -x_2, x_2, x_1$. Ona čine aritmetički niz, pa vrijedi:

$$-x_2 = -x_1 + d$$

$$x_2 = -x_1 + 2d$$

$$x_1 = -x_1 + 3d$$

Zbrajanjem prethodnih jednadžbi dobijemo $x_1 = 3(-x_1 + 2d)$, odnosno $x_1 = 3x_2$ (*).
Prema Vièteovim pravilima je:

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = 3m + 2$$
$$x_1{}^2 \cdot x_2{}^2 = m^2$$

Ako uvrstimo (*) u prethodni sustav dobijemo

$$10{x_2}^2 = 3m + 2 \quad \Rightarrow \quad {x_2}^4 = \frac{(3m+2)^2}{100}$$
$${x_2}^4 = \frac{m^2}{9}.$$

Izjednačavanjem prethodna dva izraza dobijemo

$$\frac{m^2}{9} = \frac{(3m+2)^2}{100}$$

$$19m^2 - 108m - 36 = 0,$$

čija su rješenja

$$m_1 = -\frac{6}{19}, \quad m_2 = 6.$$

<u>Zadatak 2</u>. Naći sve $z \in C$ koji zadovoljavaju jednadžbu

$$z^5 + (1+i)^{10} z = 0.$$

<u>RJEŠENJE</u>:

Prvo faktoriziramo jednadžbu $z[z^4 + (1+i)^{10}] = 0$.

1) **Prvo rješenje je $z_1 = 0$.**
2) **Drugo rješenje dobijemo iz jednadžbe**

$$z^4 = -(1+i)^{10} = -32i.$$

$$z_{2,3,4,5} = \sqrt[4]{-32i} = \sqrt[4]{32\left(cos\frac{3\pi}{2} + isin\frac{3\pi}{2}\right)}$$

Za $k = 0, 1, 2, 3$ rješenja su:

$$z_2 = \sqrt[4]{32}\left(cos\frac{3\pi}{8} + isin\frac{3\pi}{8}\right)$$
$$z_3 = \sqrt[4]{32}\left(cos\frac{7\pi}{8} + isin\frac{7\pi}{8}\right)$$
$$z_4 = \sqrt[4]{32}\left(cos\frac{11\pi}{8} + isin\frac{11\pi}{8}\right)$$
$$z_5 = \sqrt[4]{32}\left(cos\frac{15\pi}{8} + isin\frac{15\pi}{8}\right)$$

Zadatak 3. **U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu**

$$\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}\right)^2=2^{x-\sqrt{x}-1}.$$

RJEŠENJE:

Uvjet da bi jednadžba bila definirana je $x \geq 0$ i $\sqrt{x} \neq \pm\sqrt{5}$.

Nakon kvadriranja lijeve strane imamo

$$\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}\right)^2+2+\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}\right)^2+2-\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}\right)^2=2^{x-\sqrt{x}-1}$$

$$2^2=2^{x-\sqrt{x}-1}.$$

Iz prethodne jednadžbe slijedi jednadžba

$$x-\sqrt{x}-3=0.$$

Smjenom $\sqrt{x}=t$ riješimo jednadžbu, a zatim vratimo smjenu pa je rješenje $x=\frac{7+\sqrt{13}}{2}$.

Zadatak 4 **Dokazati da ne postoji funkcija $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, takva da vrijedi**

$$(f\circ f)(x)=\begin{cases}\sqrt{2}, & za \ \ \forall x\in \mathbb{Q}\\ 1, & za \ \ \forall x\in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.\end{cases}$$

RJEŠENJE:

Pretpostavimo da je $f(\sqrt{2})$ racionalan broj. Tada je na osnovi uvjeta zadatka

$$f\left(f\left(f(\sqrt{2})\right)\right)=\sqrt{2} \qquad \text{i} \qquad f\left(f\left(f(\sqrt{2})\right)\right)=f(1),$$

odakle je $f(1)=\sqrt{2}$.

Iz posljednje jednakosti slijedi da je $f(f(1)) = f(\sqrt{2})$, odnosno $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, što je onda u kontradikciji s pretpostavkom.

Dakle, ako dana funkcija postoji onda bi $f(\sqrt{2})$ morao biti iracionalan broj. Tada bi, po uvjetu zadatka, bilo ispunjeno

$$f\left(f\left(f(\sqrt{2})\right)\right) = 1 \quad \text{i} \quad f\left(f\left(f(\sqrt{2})\right)\right) = f(1),$$

odakle je $f(1) = 1$. Na osnovi posljednjeg bi vrijedilo i $f(f(1)) = f(1)$, odnosno $f(1) = \sqrt{2}$, što je u kontradikciji sa $f(1) = 1$, pa zaključujemo da funkcija sa traženim svojstvom ne postoji.

ZADATKE PRIPREMILA

dr. IVANA ZUBAC

NATJECATELJSKA KOMISIJA – SŠ

1. **MARINKO ANTUNOVIĆ, prof.**
2. **Dr. IVANA ZUBAC**

REZULTATI

NATJECANJA IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBIH

Posušje, 23. ožujka 2024.

I. razred

1. **Marija Martinović – Gimnazija fra Dominika Mandića Široki Brijeg**
2. **Marina Galić – Gimnazija fra Dominika Mandića Široki Brijeg**
3. **Mihaela Bernadić – Gimnazija Mostar**

II. razred

1. **Ante Penava – Gimnazija fra Grge Martića Posušje**
2. **Matea Čuljak – SŠ Čapljina**
3. **Maximilian Aaron Jelačić – KŠC "sv. Josip" Sarajevo**

III. razred

1. **Dragan Boban – Gimnazija fra Grge Martića Mostar**
2. **Marko Antunović – Tehničko-obrtnička škola KŠC „Don Bosco“ Žepče**
3. **Petra Lasić – Gimnazija Mostar**

IV. razred

1. **Antonija Bošković – Gimnazija fra Grge Martića Mostar**
2. **Robert Bakula – Gimnazija fra Grge Martića Posušje**
3. **Mladen Mandžo – SŠ fra Slavka Barbarića Čitluk**

POPIS UČENIKA KOJI SU SE PLASIRALI NA MATEMATIČKU OLIMPIJADU BIH

Visoko, 18. i 19. svibnja 2024.

1. **Marija Martinović – Gimnazija fra Dominika Mandića Široki Brijeg**
2. **Marina Galić – Gimnazija fra Dominika Mandića Široki Brijeg**
3. **Ante Penava – Gimnazija fra Grge Martića Posušje**
4. **Matea Čuljak – SŠ Čapljina**
5. **Dragan Boban – Gimnazija fra Grge Martića Mostar**
6. **Marko Antunović – Tehničko-obrtnička škola KŠC „Don Bosco“ Žepče**
7. **Petra Lasić – Gimnazija Mostar**
8. **Antonija Bošković – Gimnazija fra Grge Martića Mostar**
9. **Robert Bakula – Gimnazija fra Grge Martića Posušje**
10. **Mladen Mandžo – SŠ fra Slavka Barbarića Čitluk**

ŽUPANIJSKA NATJECANJA IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA HNŽ I HBŽ

VIII. i IX. razreda održana su 12. travnja 2024. (Stolac, Tihaljina, Tolisa i Bukovica)

VI. i VII. razreda održano je 10. svibnja 2024. (Vitina, Bok i Bukovica)

PROGRAM NATJECANJA 12. TRAVNJA

Do 12:00	**Dolazak sudionika natjecanja u zgradu škole domaćina**
12:45	**Otvaranje natjecanja**
13:00-14:30	**Natjecanje učenika – izrada zadataka**
14:00-16:00	**Rad komisija – pregled učeničkih radova**
16:00	**Neslužbeni rezultati natjecanja (pod šiframa)**
16:30	**Službeni rezultati natjecanja, dodjela diploma i nagrada najuspješnijim učenicima**

PROGRAM NATJECANJA 10. SVIBNJA

Do 12:00	**Dolazak sudionika natjecanja u zgradu škole domaćina**
12:45	**Otvaranje natjecanja**
13:00-14:30	**Natjecanje učenika – izrada zadataka**
14:00-16:00	**Rad komisija – pregled učeničkih radova**
16:00	**Neslužbeni rezultati natjecanja (pod šiframa)**
16:30	**Službeni rezultati natjecanja, dodjela diploma i nagrada najuspješnijim učenicima**

Z A D A C I

8 . RAZRED

1. **Koliko iznosi 75% broja $A = 1 + 1 : \left(1 - \dfrac{1 - \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}}{1 - \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}}}\right)$?**

2. **Pri rješavanju jednadžbe**
$$\frac{3x + 15}{3} - (-2x + 2) - 6(5 - x) = 0$$
učenik je umjesto koeficijenta -2 uz nepoznanicu x napisao neki drugi broj i na taj način dobio za 24 veću vrijednost nepoznanice. Koji je broj učenik napisao umjesto koeficijenta -2 ?

3. **Neki dvoznamenkasti broj djeljiv je sa 3. Ako se između znamenki tog broja upiše 0 i tako dobivenom troznamenkastom broju doda dvostruki umnožak znamenke stotica, dobiva se devet puta veći broj od danog dvoznamenkastog broja. Koji je to dvoznamenkasti broj?**

4. **Duljina jedne stranice trokuta ABC je a, druge $7a$ i duljina treće stranice je također višekratnik broja a. Koliki je opseg trokuta ABC?**

9 . RAZRED

1. **Provjerite je li $a \in \mathbb{Z}$, ako je**
$$a = \left(7 + \frac{1}{3} : \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 0.15 \cdot \frac{1}{0.2} - 8\right)^3 - \sqrt{\frac{115^2 - 110^2}{5} + \frac{\sqrt{30^2 - 18^2}}{4}}.$$

2. **Riješite sustav jednadžbi $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1997, \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1998, \quad \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = 1999.$**

3. **Neka je D točka na hipotenuzi AB pravokutnog trokuta ABC, takva da je $|CA| = |CD| = \sqrt{5}$ i $|CB| = 2\sqrt{5}$. Izračunaj opseg trokuta BCD.**

4. **Osam radnika i 7 radnica za 12 dana naprave 53 kompleta nekog namještaja, a 9 radnika i 6 radnica za 18 dana naprave 81 komplet istog namještaja. Koliko će kompleta namještaja za 20 dana napraviti 12 radnika i 13 radnica?**

R J E Š E N J A

8. RAZRED

<u>Zadatak 1.</u> Koliko iznosi 75% broja $A = 1 + 1 : \left(1 - \frac{1 - \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}}{1 - \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}}}\right)$?

RJEŠENJE:

Izračunajmo prvo broj A:

$$A = 1 + 1 : \left(1 - \frac{1 - \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}}{1 - \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}}}\right) = 1 + 1 : \left(1 - \frac{1 - \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}}}{1 - \frac{\frac{1}{30}}{\frac{11}{30}}}\right)$$

$$A = 1 + 1 : \left(1 - \frac{1 - \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{11}}\right)$$

$$A = 1 + 1 : \left(1 - \frac{\frac{4}{5}}{\frac{10}{11}}\right)$$

$$A = 1 + 1 : \left(1 - \frac{22}{25}\right) = 1 + 1 : \frac{3}{25}$$

$$A = 1 + \frac{25}{3} = \frac{28}{3}$$

75% od $\frac{28}{3}$ je $\frac{75}{100} \cdot \frac{28}{3} = 7.$

<u>Zadatak 2</u>. Pri rješavanju jednadžbe

$$\frac{3x + 15}{3} - (-2x + 2) - 6(5 - x) = 0$$

učenik je umjesto koeficijenta -2 uz nepoznanicu x napisao neki drugi broj i na taj način dobio za 24 veću vrijednost nepoznanice. Koji je broj učenik napisao umjesto koeficijenta -2 ?

RJEŠENJE: Riješimo prvo zadanu jednadžbu

$$\frac{3x+15}{3}-(-2x+2)-6(5-x)=0.$$

Nakon množenja jednadžbe sa 3 i sređivanja dobijemo

$$3x+15-3(-2x+2)-18(5-x)=0$$

$$3x+15+6x-6-90+18x=0$$

$$27x=81$$

$$x=3.$$

Zbog toga je rješenje pogrešno napisane jednadžbe $x=3+24=27$, što uvrstimo u polaznu jednadžbu, a umjesto koeficijenta -2 pišemo nepoznati koeficijent a

$$\frac{3\cdot 27+15}{3}-(a\cdot 27+2)-6(5-27)=0.$$

Rješavanjem prethodne jednadžbe dobijemo da je $a=6$.

Zadatak 3. Neki dvoznamenkasti broj djeljiv je sa 3. Ako se između znamenki tog broja upiše 0 i tako dobivenom troznamenkastom broju doda dvostruki umnožak znamenke stotica, dobiva se devet puta veći broj od danog dvoznamenkastog broja. Koji je to dvoznamenkasti broj?

RJEŠENJE:

Neka dvoznamenkasti broj ima oblik $\overline{ab}$, pri čemu su a i b znamenke, pa dobiveni troznamenkasti broj ima oblik $\overline{a0b}$.

Prema uvjetima zadatka jednadžba glasi

$$100a+b+2a=9(10a+b).$$

Rješavanjem jednadžbe dobijemo

$$12a=8b,$$

tj.

$$\boldsymbol{a = \frac{2}{3}b.}$$

Pošto su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ znamenke, $\boldsymbol{b}$ može imati jednu od sljedeće 3 vrijednosti: 3, 6, 9.

Za prve dvije znamenke dobijemo brojeve 23 i 46 koji nisu djeljivi sa 3.

Za $\boldsymbol{b = 9}$, dobijemo $\boldsymbol{a = 6}$, pa je traženi dvoznamenkasti broj 69.

<u>Zadatak 4</u>. Duljina jedne stranice trokuta $\boldsymbol{ABC}$ je $\boldsymbol{a}$, druge $\boldsymbol{7a}$ i duljina treće stranice je također višekratnik broja $\boldsymbol{a}$. Koliki je opseg trokuta $\boldsymbol{ABC}$?

<u>RJEŠENJE</u>:

Neka je $\boldsymbol{c}$ duljina treće stranice trokuta $\boldsymbol{ABC}$.

Tada je $\boldsymbol{c = n \cdot a}$, gdje je $\boldsymbol{n}$ prirodan broj (pošto je $\boldsymbol{c}$ također višekratnik broja $\boldsymbol{a}$).

Budući da u trokutu mora vrijediti da je zbroj duljina dviju stranica uvijek veći od duljine treće stranice, onda je

$$\boldsymbol{c < a + 7a,}$$

tj.

$$\boldsymbol{na < 8a,}$$

$$\boldsymbol{n < 8.}$$

Iz istog razloga vrijedi,

$$\boldsymbol{a + na > 7a,}$$

$$\boldsymbol{na > 6a,}$$

tj.

$$\boldsymbol{n > 6.}$$

Iz ova dva uvjeta slijedi da je $\boldsymbol{n = 7}$, pa su stranice trokuta $\boldsymbol{a, 7a, 7a}$, a opseg trokuta jednak je

$$\boldsymbol{O = 15a.}$$

9. RAZRED

Zadatak 1. Provjerite je li $a \in \mathbb{Z}$, ako je

$$a = \left(7 + \frac{1}{3} : \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 0.15 \cdot \frac{1}{0.2} - 8\right)^3 - \sqrt{\frac{115^2 - 110^2}{5}} + \frac{\sqrt{30^2 - 18^2}}{4}.$$

RJEŠENJE:

Sređivanjem izraza, primjenom formule za razliku kvadrata dobijemo

$$a = \left(7 + \frac{1}{3} : \frac{4}{9} - \frac{15}{100} \cdot \frac{1}{\frac{2}{10}} - 8\right)^3 - \sqrt{\frac{(115 - 110)(115 + 110)}{5}} + \frac{\sqrt{(30 - 18)(30 + 18)}}{4}$$

$$a = \left(7 + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{20} \cdot \frac{5}{1} - 8\right)^3 - \sqrt{\frac{5 \cdot 225}{5}} + \frac{\sqrt{12 \cdot 48}}{4}$$

$$a = \left(7 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} - 8\right)^3 - 15 + \frac{\sqrt{12 \cdot 12 \cdot 4}}{4}$$

$$a = (-1)^3 - 15 + \frac{\sqrt{12^2 \cdot 2^2}}{4}$$

$$a = -1 - 15 + \frac{12 \cdot 2}{4}$$

Pa je $a = -10 \in \mathbb{Z}$.

Zadatak 2. Riješite sustav jednadžbi $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1997$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1998$, $\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = 1999$.

RJEŠENJE:

Zbrojimo sve tri jednadžbe

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=5994,$$

tj.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2997. \qquad (*)$$

Oduzimajući redom dane jednadžbe od prethodne (*) dobijemo

$$\frac{1}{z}=1000,$$

$$\frac{1}{x}=999,$$

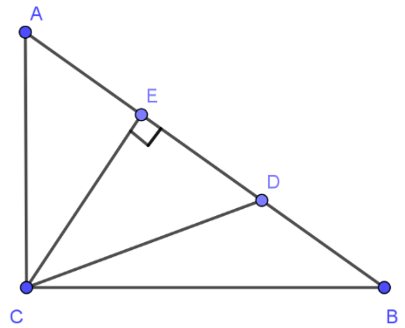
$$\frac{1}{y}=998.$$

Znači, rješenja su

$$x=\frac{1}{999}, \quad y=\frac{1}{998}, \quad z=\frac{1}{1000}.$$

Zadatak 3. Neka je D točka na hipotenuzi AB pravokutnog trokuta ABC, takva da je $|CA|=|CD|=\sqrt{5}$ i $|CB|=2\sqrt{5}$. Izračunaj opseg trokuta BCD.

RJEŠENJE:



Primjenom Pitagorina poučka dobijemo:

$$|AB|^2=|CA|^2+|BC|^2$$

$$|AB|=5$$

Iz površine trokuta ABC imamo

$$P_{\Delta ABC}=\frac{|AC|\cdot|BC|}{2}=\frac{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}{2}=5 \quad \text{ili} \quad P_{\Delta ABC}=\frac{|AB|\cdot|EC|}{2}=\frac{5\cdot|EC|}{2}$$

tj. $|EC|=2$.

Primjenom Pitagorina poučka na jednakokračni trokut ΔADC dobijemo

$$|ED| = |AE| = \sqrt{|AC|^2 - |EC|^2} = 1,$$

pa je

$$|BD| = |AB| - |AD| = 3.$$

Znači opseg trokuta BCD jednak je 3+3$\sqrt{5}$.

<u>**Zadatak 4.**</u> **Osam radnika i 7 radnica za 12 dana naprave 53 kompleta nekog namještaja, a 9 radnika i 6 radnica za 18 dana naprave 81 komplet istog namještaja. Koliko će kompleta namještaja za 20 dana napraviti 12 radnika i 13 radnica?**

<u>**RJEŠENJE**</u>:

Neka za 1 dan radnika napravi x, a radnica y kompleta namještaja.

Iz uvjeta zadatka dobijemo sustav

$$\begin{cases} 8x + 7y = \dfrac{53}{12} \\ 9x + 6y = \dfrac{81}{18} \end{cases}.$$

Riješimo sustav množeći prvu jednadžbu sa -6, a drugu sa 7

$$\begin{cases} -48x - 42y = -\dfrac{53}{2} \\ 63x + 42y = \dfrac{567}{18} \end{cases}.$$

Nakon zbrajanja imamo

$$15x = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3},$$

a $y = \frac{1}{4}$. Znači za 20 dana 12 radnika i 13 radnica će napraviti

$$20 \cdot \left(12 \cdot \frac{1}{3} + 13 \cdot \frac{1}{4}\right) = 145$$

kompleta namještaja.

REZULTATI

županijskih natjecanja iz matematike učenika VIII. I IX. razreda osnovnih škola HNŽ, ZHŽ, HBŽ i ŽP održanih 12. travnja 2024.

VIII. razred **HNŽ - Stolac**

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Maro Marinčić	O.Š. Petra Bakule, Mostar
II. mjesto	Marija Marić	O.Š. Petra Bakule, Mostar
III. mjesto	Marija Perić	O.Š. Vladimira Pavlovića, Čapljina

IX. razred

I. mjesto	Nikola Goluža	O.Š. S. S. Kranjčevića, Mostar
II. mjesto	Slavo Vidak Azinović	O.Š. Petra Bakule, Mostar
III. mjesto	Marko Knežević	O.Š. Kardinala Stepinca, Neum

VIII. razred **ZHŽ - Tihaljina**

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Marija Galić	O.Š. Kočerin, Kočerin
II. mjesto	Ljubica Vlašić	O.Š. fra Stipana Vrljića, Sovići
III. mjesto	Luka Pekas	O.Š. Ivana Mažuranića, Posušje

IX. razred

I. mjesto	Lovre Vlašić	O.Š. fra Stipana Vrljića, Sovići
II. mjesto	Darija Bohutinski	O.Š. Ruđera Boškovića, Grude
III. mjesto	Petra Ćesić	O.Š. Ivana Mažuranića, Posušje

VIII. razred **HBŽ - Bukovica**

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Luka Mišković	O.Š. Ivan Goran Kovačić, Livno
II. mjesto	Petra Džeko	O.Š. Ivan Goran Kovačić, Livno
III. mjesto	Marija Markić	O.Š. Ivana Mažuranića, Kongora

IX. razred

I. mjesto	Drago Šarić	O.Š. fra Miroslava Džaje, Kupres
II. mjesto	Marko Džeko	O.Š. Ivan Goran Kovačić, Livno
III. mjesto	Anja Pejaković	O.Š. Ivan Goran Kovačić, Livno

VIII. razred **ŽP - Tolisa**

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Matea Vukić	O.Š. Orašje, Orašje
II. mjesto	Josip Mikić	O.Š. Antuna Gustava Matoša, Vidovice
III. mjesto	Jovano Prepelec	O.Š. Vladimira Nazora, Odžak

IX. razred

I. mjesto	Esma Sinanović	O.Š. Vladimira Nazora, Odžak
II. mjesto	Filip Matanović	O.Š. Vladimira Nazora, Odžak
III. mjesto	Anđelina Gašić	O.Š. Vladimira Nazora, Odžak

POPIS UČENIKA KOJI SU SE PLASIRALI NA JUNIORSKU MATEMATIČKU OLIMPIJADU BIH

Doboj, 1. lipnja 2024.

1. **Maro Marinčić - O.Š. Petra Bakule, Mostar**
2. **Nikola Goluža - O.Š. S. S. Kranjčevića, Mostar**
3. **Marija Galić - O.Š. Kočerin, Kočerin**
4. **Lovre Vlašić - O.Š. fra Stipana Vrljića, Sovići**
5. **Luka Mišković - O.Š. Ivan Goran Kovačić, Livno**
6. **Drago Šarić - O.Š. fra Miroslava Džaje, Kupres**
7. **Matea Vukić - O.Š. Orašje, Orašje**
8. **Esma Sinanović - O.Š. Vladimira Nazora, Odžak**

Z A D A C I

6 . RAZRED

1. **Izračunaj vrijednost izraza**

$$\mathbf{64 + 2 \cdot [11147 - 27 \cdot (45 + 3105 : 9)] - 125 + 25 \cdot (48 - 45 : 3)}.$$

2. **Odredi sve troznamenkaste brojeve djeljive sa 15, kod kojih je znamenka jedinica jednaka znamenci stotica.**

3. **Zadani pravokutnik opsega 112 cm podijeljen je na dva pravokutnika. Opseg jednog od ta dva pravokutnika je za 72 manji od opsega zadanog pravokutnika, a opseg drugog za 34 cm manji od opsega zadanog pravokutnika. Kolika je površina zadanog pravokutnika?**

4. **Ako broju x „dopišemo“ s desne strane broj 6, a zatim tako dobiveni broj podijelimo sa 9 i dobivenom količniku dopišemo s desne strane broj 7, a zatim tako nastali broj podijelimo sa 13 dobijemo broj 19. Koji je broj x?**

7 . RAZRED

1. **Izračunaj vrijednost izraza**

$$\frac{3\frac{1}{3}\cdot 1.9+19.5:4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75}-0.16}:\frac{3.5+4\frac{2}{3}+2\frac{2}{15}}{0.5\cdot\left(1\frac{1}{20}+4.1\right)}.$$

2. **Izračunaj vrijednosti brojeva a, b, c, d, e i poredaj ih po veličini od najmanjeg do najvećeg, ako je**

$$a=-1-|-2|,\quad b=|a-1|,\quad c=|a-b|,\quad d=|a|-|b|-|c|,$$
$$e=|a+b+c+d|.$$

3. **Na pitanje nastavnika matematike: „Koliko učenika je odsutno sa sata?“, dežurni učenik je odgovorio: „Jedna devetina“. U tom trenutku je ušao jedan učenik u učionicu koji je kasnio, pa se dežurni učenik ispravio i rekao: „Sada nas nedostaje samo jedna dvanaestina.“ Koliko je učenika u tom razredu?**

4. **Duljine stranica pravokutnika razlikuju se za $4.2\ cm$, a njegov opseg je $23.2\ cm$. Nad njegovom duljom stranicom kao osnovicom, nacrtan je s vanjske strane jednakokračni trokut kome je opseg jednak opsegu pravokutnika. Odredi duljine stranica trokuta.**

R J E Š E N J A

6 . RAZRED

Zadatak 1. **Izračunaj vrijednost izraza**

$$64+2\cdot[11147-27\cdot(45+3105:9)]-125+25\cdot(48-45:3).$$

<u>RJEŠENJE</u>:

$$64 + 2 \cdot [11147 - 27 \cdot (45 + 3105 : 9)] - 125 + 25 \cdot (48 - 45 : 3) =$$

$$= 64 + 2 \cdot [11147 - 27 \cdot (45 + 345)] - 125 + 25 \cdot (48 - 15)$$

$$= 64 + 2 \cdot [11147 - 27 \cdot 390] - 125 + 25 \cdot 33$$

$$= 64 + 2 \cdot [11147 - 10530] - 125 + 825$$

$$= 64 + 2 \cdot 617 - 125 + 825$$

$$= 64 + 1234 - 125 + 825$$

$$= 1298 - 125 + 825$$

$$= 1173 + 825$$

$$= 1998.$$

<u>Zadatak 2.</u> Odredi sve troznamenkaste brojeve djeljive sa 15, kod kojih je znamenka jedinica jednaka znamenci stotica.

<u>RJEŠENJE</u>: Ako je broj djeljiv sa 15, onda je on djeljiv i sa 3 i sa 5.

Iz djeljivosti sa 5 slijedi da je znamenka jedinica 0 ili 5. Pošto je znamenka jedinica jednaka znamenci stotica, ona ne može biti 0, jer broj 0 ne može biti na prvom mjestu.

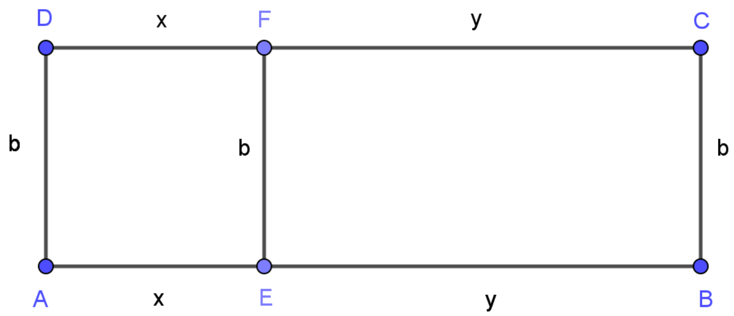
Prema tome, znamenka stotica i jedinica je 5, pa traženi brojevi imaju oblik 5_5.

Pošto trebaju biti djeljivi sa 3, zbroj znamenaka mora biti djeljiv sa 3, pa znamenka desetica može biti 2, 5 i 8, odnosno traženi brojevi su

525, 555 i 585.

<u>Zadatak 3.</u> **Zadani pravokutnik opsega 112 cm podijeljen je na dva pravokutnika. Opseg jednog od ta dva pravokutnika je za 72 manji od opsega zadanog pravokutnika, a opseg drugog za 34 cm manji od opsega zadanog pravokutnika. Kolika je površina zadanog pravokutnika?**

<u>RJEŠENJE</u>: Neka je $ABCD$ zadani pravokutnik i neka pravokutnik $AEFD$ ima za 72 cm manji opseg (slika).



Razlika opsega ova dva pravokutnika je $2y$, pa je $2y = 72 \quad \Rightarrow \quad y = 36$.

Na sličan način zaključimo da se opsezi pravokutnika $ABCD$ i $EBCF$ razlikuju za $2x$, pa je $2x = 34 \quad \Rightarrow \quad x = 17$.

Kako je $x + y = |AB| = a$, slijedi da je $a = 36 + 17 = 53$.

Pošto je

$$2(a + b) = 112$$

$$a + b = 56$$

$$53 + b = 56$$

$$b = 3.$$

Tražena površina pravokutnika jednaka je

$$P = a \cdot b$$

$$P = 159\ cm^2.$$

<u>Zadatak 4.</u> **Ako broju x „dopišemo“ s desne strane broj 6, a zatim tako dobiveni broj podijelimo sa 9 i dobivenom količniku dopišemo s desne strane broj 7, a zatim tako nastali broj podijelimo sa 13 dobijemo broj 19. Koji je broj x?**

RJEŠENJE: **Dopisivanjem s desne strane dobiveni broj će imati oblik $10 \cdot x + 6$, a zatim prema uvjetima zadatka postavimo jednadžbu**

$$\{[(10 \cdot x + 6): 9] \cdot 10 + 7\}: 13 = 19.$$

Rješavanjem jednadžbe dobijemo

$$[(10 \cdot x + 6): 9] \cdot 10 + 7 = 19 \cdot 13$$

$$[(10 \cdot x + 6): 9] \cdot 10 = 247 - 7$$

$$(10 \cdot x + 6): 9 = 240: 10$$

$$10 \cdot x + 6 = 24 \cdot 9$$

$$10 \cdot x = 216 - 6$$

$$10 \cdot x = 210$$

$$x = 210: 10$$

$$x = 21.$$

7 . RAZRED

Zadatak 1. Izračunaj vrijednost izraza

$$\frac{3\frac{1}{3} \cdot 1.9 + 19.5 : 4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75} - 0.16} : \frac{3.5 + 4\frac{2}{3} + 2\frac{2}{15}}{0.5 \cdot \left(1\frac{1}{20} + 4.1\right)}.$$

RJEŠENJE:

$$\frac{3\frac{1}{3} \cdot 1.9 + 19.5 : 4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75} - 0.16} : \frac{3.5 + 4\frac{2}{3} + 2\frac{2}{15}}{0.5 \cdot \left(1\frac{1}{20} + 4.1\right)} =$$

$$=\frac{\frac{10}{3}\cdot\frac{19}{10}+\frac{195}{10}:\frac{9}{2}}{\frac{62}{75}-\frac{16}{10}} \;:\; \frac{\frac{35}{10}+\frac{14}{3}+\frac{32}{15}}{\frac{5}{10}\cdot\left(\frac{21}{20}+\frac{41}{10}\right)}$$

$$=\frac{\frac{19}{3}+\frac{39}{2}\cdot\frac{2}{9}}{\frac{62-12}{75}} \;:\; \frac{\frac{105+140+64}{30}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{21+82}{20}}$$

$$=\frac{\frac{57+39}{9}}{\frac{50}{75}} \;:\; \frac{\frac{309}{30}}{\frac{103}{40}}$$

$$=\frac{96}{6}\cdot\frac{1}{4}$$

$$=4$$

Zadatak 2. **Izračunaj vrijednosti brojeva a, b, c, d, e i poredaj ih po veličini od najmanjeg do najvećeg, ako je**

$$a=-1-|-2|,\quad b=|a-1|,\quad c=|a-b|,\quad d=|a|-|b|-|c|,$$
$$e=|a+b+c+d|.$$

RJEŠENJE:

$$a=-1-|-2|=-1-2=-3$$

$$b=|-3-1|=4$$

$$c=|-3-4|=7$$

$$d=|-3|-|4|-|7|=-8$$

$$e=|-3+4+7+(-8)|=0$$

Prema tome slijedi

$$d<a<e<b<c.$$

<u>Zadatak 3.</u> Na pitanje nastavnika matematike: „Koliko učenika je odsutno sa sata?“, dežurni učenik je odgovorio: „Jedna devetina“. U tom trenutku je ušao jedan učenik u učionicu koji je kasnio, pa se dežurni učenik ispravio i rekao: „Sada nas nedostaje samo jedna dvanaestina.“ Koliko je učenika u tom razredu?

<u>RJEŠENJE</u>: Označimo ukupan broj učenika u razredu sa x.

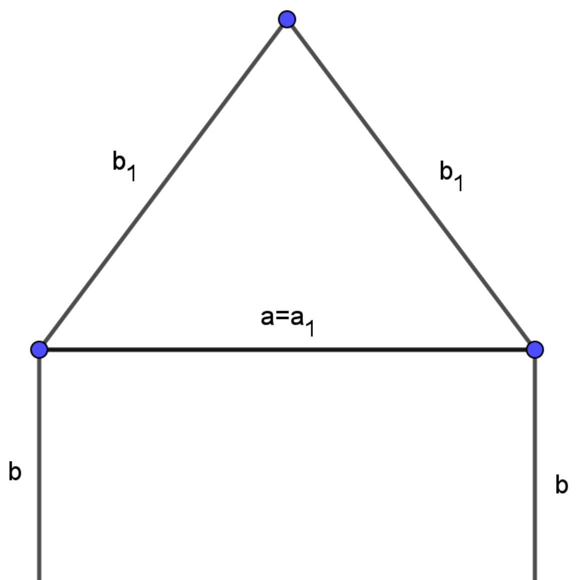
Prema uvjetu zadatka, $\frac{x}{9}$ je za 1 veće od $\frac{x}{12}$, odnosno jednadžba glasi

$$\frac{x}{9} = 1 + \frac{x}{12}.$$

Rješenje jednadžbe je 36.

<u>Zadatak 4.</u> Duljine stranica pravokutnika razlikuju se za $4.2\ cm$, a njegov opseg je $23.2\ cm$. Nad njegovom duljom stranicom kao osnovicom, nacrtan je s vanjske strane jednakokračni trokut kome je opseg jednak opsegu pravokutnika. Odredi duljine stranica trokuta.

<u>RJEŠENJE</u>:



$$a = b + 4.2\ cm$$
$$O = 23.2\ cm$$

$$O = 2(a + b)$$
$$2 \cdot (b + 4.2 + b) = 23.2$$
$$2 \cdot b + 4.2 = 23.2 : 2$$
$$2 \cdot b = 7.4$$

$$\boxed{b = 3.7\ cm}$$
$$\boxed{a = 7.9\ cm}$$

Pošto je $a_1 = a = 7.9\ cm$, a opseg trokuta jednak opsegu pravokutnika, slijedi da je

$$a_1 + 2 \cdot b_1 = 23.2.$$

Odnosno

$$7.9 + 2 \cdot b_1 = 23.2,$$

pa je $b_1 = 7.65 cm$.

REZULTATI

županijskih natjecanja iz matematike učenika VI. i VII. razreda osnovnih škola ZHŽ, HBŽ i ŽP održanih 10. svibnja 2024.

VI. razred ZHŽ - Vitina

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Željko Šimić	O.Š. Ruđera Boškovića, Grude
II. mjesto	Ivan Kondža	O.Š. Ivana Mažuranića, Posušje
III. mjesto	Iva Ćorluka	O.Š. Ruđera Boškovića, Grude
VII. razred		
I. mjesto	Iva Grizelj	O.Š. fra Stjepana Vrljića, Sovići
II. mjesto	Bruna Majić	O.Š. A.B. i Stanislava Šimića, Drinovci
III. mjesto	Nikola Vlašić	O.Š. fra Stjepana Vrljića Sovići

VI. razred HBŽ - Bukovica

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Nora Propadalo	O.Š. Ivan Goran Kovačić, Livno
II. mjesto	Anđela Šimić	O.Š. fra Miroslava Džaje, Kupres
III. mjesto	Marko Kovačević	O.Š. Ivana Mažuranića, Tomislavgrad
VII. razred		
I. mjesto	Matej Pavić	O.Š. Ivan Goran Kovačić, Livno
II. mjesto	Ksenija Materić	O.Š. Drvar, Drvar
III. mjesto	Veronika Pokrajčić	O.Š. fra Mije Čujića, Bukovica

VI. razred **ŽP - Bok**

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Faris Salkanović	O.Š. Vladimira Nazora, Odžak
II. mjesto	Mihael Klaić	O.Š. Ruđera Boškovića, Donja Mahala
III. mjesto	Lara Nedić	O.Š. Ruđera Boškovića, Donja Mahala

VII. razred

I. mjesto	David Jazvić	O.Š. Vladimira Nazora, Odžak
II. mjesto	Ajla Smajlović	O.Š. Orašje, Orašje
III. mjesto	Jelena Prgić	O.Š. Ruđera Boškovića, Donja Mahala

ZADATKE PRIPREMILA

dr. IVANA ZUBAC

ŽUPANIJSKA NATJECANJA SU PROVELE:

Vesna Čolak – ZHŽ

Nora Šesto – HBŽ

Anita Marijanović – HNŽ

Kadica Dominković – ŽP

ZAHVALJUJEMO SPONZORIMA KOJI SU POMOGLI ORGANIZIRANJE NATJECANJA MLADIH MATEMATIČARA UČENIKA OSNOVNIH I SREDNJIH ŠKOLA U BIH

Glavni sponzori:

- **JP Hrvatske telekomunikacije d.d. Mostar**
- **Elektroprivreda HZ-HB d.d. Mostar**

Ostali sponzori:

- **Ministarstvo znanosti, prosvjete, kulture i športa HBŽ**
- **Ministarstvo prosvjete, znanosti, kulture i športa ZHŽ**
- **Ministarstvo prosvjete, znanosti, kulture i športa PŽ**
- **Predsjednica Federacije BiH, gospođa Lidija Bradara**
- **Načelnik općine Posušje, gospodin Ante Begić**
- **Gradonačelnik Stoca, gospodin Stjepan Bošković**
- **Načelnik Općine Žepče, gospodin Mato Zovko**
- **Eagle Technology d.o.o. Žepče**
- **YUCA d.o.o. Žepče**
- **K-Projekt d.o.o. Žepče**
- **Lukas Nakić d.o.o. Sarajevo**

Posebna zahvala Franjevačkoj klasičnoj gimnaziji Visoko i ravnatelju fra. Stipi Alandžaku koji su ugostili MOBiH kojoj smo bili domaćini.

BILTEN uredio Marinko Antunović, prof.

Lipanj, 2024.

JP ELEKTROPRIVREDA
HRVATSKE ZAJEDNICE HERCEG BOSNE d.d. Mostar

HT eronet

Veza koja traje