

NATJECANJA IZ MATEMATIKE

UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA FEDERACIJE BIH

Tomislavgrad, 9. travnja 2022.

UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA HNŽ I HBŽ

VIII. i IX. razreda održana su 2. travnja 2022. (Mostar i Livno)

VI. i VII. razreda održano je 28. svibnja 2022. (Livno)

BILTEN

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA ŽEPČE

PROGRAM NATJECANJA – SREDNJE ŠKOLE

- 09:30** **Sastanak profesora-pratitelja učenika**
- 10:00** **Svečano otvaranje natjecanja**
Sudionike natjecanja i goste pozdravili su:
Stanko Čamber, ravnatelj SSŠ Tomislavgrad
Bože Kovačević, izaslanik načelnika općine Tomislavgrad
Gordana Nakić, ministrica znanosti, prosvjete, kulture i športa HBŽ
Marinko Antunović, predsjednik UMRB Žepče
Dr. Jozo Bagarić, izaslanik predsjednika Federacije BiH koji je i otvorio natjecanje
- 10:30-13:30** **Natjecanje učenika – izrada zadataka**
- 13:00-15:30** **Rad komisija – pregled učeničkih radova**
- 12:00-14:30** **Ručak za sve sudionike natjecanja**
- 15:30** **Neslužbeni rezultati natjecanja (pod šiframa)**
- 15:30-16:00** **Reklamacije učenika-natjecatelja Natjecateljskoj komisiji**
- 16:30** **Proglašenje službenih rezultata natjecanja, dodjela diploma i nagrada najuspješnijim učenicima**
- 17:00** **Zatvaranje natjecanja**

Z A D A C I

1. RAZRED

1. Riješi (uz diskusiju) jednadžbu $\frac{2p-5}{x+2} = \frac{3x+4}{x^2+3x+2}(p-1) + \frac{3}{x+1}(p-1)$.

Za koje vrijednosti realnog parametra p je rješenje jednadžbe x manje od -2 ?

2. Koja se znamenka nalazi na 2006. mjestu iza decimalne točke u decimalnom zapisu broja $\frac{469}{1998}$?
3. Dokaži da je zbroj kubova triju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv sa zbrojem tih triju brojeva.
4. Duljine stranica trokuta su prirodni brojevi a, b, c , a jedna od visina jednaka je zbroju druge dvije. Dokazati da je $a^2 + b^2 + c^2$ potpun kvadrat.

2. RAZRED

1. Odredi sve kompleksne brojeve z takve da vrijedi

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z = 5 \cdot \operatorname{Im} z \\ |z - (a + ib)| = 5 \end{cases}$$

gdje su a i b ($a > b$) rješenja kvadratne jednadžbe $(x-1)^2 + 3(x-1) - 4 = 0$.

2. U ovisnosti o pozitivnom realnom parametru p riješi nejednadžbu

$$\frac{x}{p} - \frac{2p}{x} < 2.$$

3. U pravokutnom trokutu ABC , kojem su duljine kateta $|CB| = a$, $|CA| = \frac{3}{4}a$ upisana je kružnica k . Nađite udaljenost vrha C od točke kružnice k koja je najbliža točki C .
4. Odredi sve prirodne brojeve a, b, c takve da je

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1.$$

3. RAZRED

1. Odredi sve x, y za koje vrijedi

$$\begin{cases} 7(\log_y x + \log_x y) = 50 \\ xy = 256 \end{cases}.$$

2. Ako su x, y, a, b realni brojevi za koje vrijedi $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} a$,
 $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \operatorname{ctg} b$, $x + y = \frac{\pi}{4}$, izračunaj $\operatorname{ctg} a - \operatorname{tg} b$.
3. Baza trostrane piramide je pravokutni trokut s katetama duljina 12 i 35. Sve pobočke zatvaraju s ravninom baze kut od 60° . Odredi oplošje piramide.
4. Tri učenika riješila su ukupno 100 zadataka, pri čemu je svaki riješio po 60 zadataka. Zadatak se smatra teškim ako ga je riješio samo jedan učenik, a lakim ako su ga riješila sva trojica učenika. Dokazati da je teških zadataka bilo za 20 više od lakih.

4. RAZRED

1. Tri broja čine geometrijski niz. Ako drugi broj uvećamo za 8, tada ti brojevi čine aritmetički niz. Ako poslije toga posljednji broj uvećamo za 64 tada niz ponovo postaje geometrijski. Odredi te brojeve.
2. Odredi u Gaussovoj ravnini skup kompleksnih brojeva za koje je $z^2 + z + 1$ pozitivan realan broj.
3. Odredi brojeve a, b, c, d takve da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$a \binom{n}{1} + b \binom{n}{2} + c \binom{n}{3} + d \binom{n}{4} = n^4.$$

4. Prikazi jednog prirodnog broja n u sustavima s bazama 7 i 9 imaju tri iste znamenke ali u obrnutim poredcima. Odredi sve takve brojeve.

RJEŠENJA

1. RAZRED

Zadatak 1. Riješi (uz diskusiju) jednadžbu $\frac{2p-5}{x+2} = \frac{3x+4}{x^2+3x+2}(p-1) + \frac{3}{x+1}(p-1)$.

Za koje vrijednosti realnog parametra p je rješenje jednadžbe x manje od -2 ?

RJEŠENJE:

Kako vrijedi $x^2 + 3x + 2 = x^2 + x + 2x + 2 = x(x + 1) + 2(x + 1) = (x + 1)(x + 2)$, nakon množenja jednadžbe

$$\frac{2p-5}{x+2} = \frac{3x+4}{x^2+3x+2}(p-1) + \frac{3}{x+1}(p-1)$$

sa $(x + 1)(x + 2)$, uz uvjete $x \neq -1, x \neq -2$, dobijemo

$$(2p-5)(x+1) = (3x+4)(p-1) + 3(x+2)(p-1).$$

Sređivanjem imamo

$$x(1-4p) = 8p-5.$$

Uz uvjet $p \neq \frac{1}{4}$ rješenje jednadžbe je

$$x = \frac{8p-5}{1-4p}.$$

Za $p = \frac{1}{4}$ jednadžba nema rješenja. Još moramo provjeriti uvjete:

$$\begin{aligned}x = -2 &\Leftrightarrow \frac{8p-5}{1-4p} = -2 \Leftrightarrow 8p-5 = -2(1-4p) \Rightarrow -5 = -2 \\x = -1 &\Leftrightarrow \frac{8p-5}{1-4p} = -1 \Leftrightarrow 8p-5 = -(1-4p) \Rightarrow p = 1\end{aligned}$$

Znači, ni za koji p nije $x = -2$, a samo za $p = 1$ je $x = -1$. Dakle, jednadžba nema rješenja ni za $p = 1$.

Za uvjet $x < -2$ imamo $\frac{8p-5}{1-4p} < -2$, odnosno $\frac{-3}{1-4p} < 0$ iz čega slijedi $1-4p > 0$, tj.

$$p < \frac{1}{4}.$$

Zadatak 2. Koja se znamenka nalazi na 2006. mjestu iza decimalne točke u decimalnom zapisu broja $\frac{469}{1998}$?

RJEŠENJE:

Uočavamo da se poslije predperioda (nakon znamenke 2 na prvom decimalnom mjestu) ponavlja period od 3 znamenke 347:

$$\frac{469}{1998} = 469 : 1998 = 0.2347347 \dots = 0.\overline{2347}.$$

On se do 2006. znamenke ponovi 668 puta, jer je:

$$2005 = 668 \cdot 3 + 1.$$

Znači, na 2006. mjestu se nalazi prva znamenke perioda – broj 3.

Zadatak 3. Dokaži da je zbroj kubova triju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv sa zbrojem tih triju brojeva.

RJEŠENJE:

Ako srednji od tih triju brojeva označimo s n , ta tri broja su $n - 1, n, n + 1$. Njihov zbroj je

$$(n - 1) + n + (n + 1) = 3n.$$

Zbroj njihovih kubova je

$$(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 = 3n^3 + 6n.$$

Sada lako vidimo da tvrdnja vrijedi jer je

$$3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2),$$

pa je očito djeljivo s $3n$.

Zadatak 4. Duljine stranica trokuta su prirodni brojevi a, b, c , a jedna od visina jednaka je zbroju druge dvije. Dokazati da je $a^2 + b^2 + c^2$ potpun kvadrat.

RJEŠENJE:

Neka je $v_c = v_a + v_b$. Iz formula za površinu trokuta

$$\begin{cases} P = \frac{a \cdot v_a}{2} \Rightarrow v_a = \frac{2P}{a} \\ P = \frac{b \cdot v_b}{2} \Rightarrow v_b = \frac{2P}{b} \\ P = \frac{c \cdot v_c}{2} \Rightarrow v_c = \frac{2P}{c} \end{cases}$$

slijedi

$$\frac{2P}{c} = \frac{2P}{a} + \frac{2P}{b},$$

odnosno

$$2ab = 2bc + 2ac \quad : 2$$

$$ab - bc - ac = 0$$

Tada je

$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \underbrace{(ab - bc - ac)}_{=0} = a^2 + b^2 + c^2.$$

što je i trebalo dokazati.

2. RAZRED

Zadatak 1. Odredi sve kompleksne brojeve z takve da vrijedi

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z = 5 \cdot \operatorname{Im} z \\ |z - (a + ib)| = 5 \end{cases}$$

gdje su a i b ($a > b$) rješenja kvadratne jednadžbe $(x - 1)^2 + 3(x - 1) - 4 = 0$.

RJEŠENJE:

Rješenja jednadžbe $(x - 1)^2 + 3(x - 1) - 4 = 0$ su $(x - 1)_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$, odnosno $x_1 = -3, x_2 = 2$. Sređivanjem se dobiva jednadžba $x^2 + x - 6 = 0$ sa istim rješenjima.

Tražimo kompleksni broj $z = x + iy$. Iz prvog uvjeta je $x = 5y$, pa drugi uvjet možemo zapisati kao:

$$|5y + yi - 2 + 3i| = 5$$

$$(5y - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

$$13y^2 - 7y - 6 = 0$$

Rješenja su

$$y_1 = 1, x_1 = 5$$

$$y_2 = -\frac{6}{13}, x_2 = -\frac{30}{13}$$

odnosno, $z_1 = 5 + i$ i $z_2 = -\frac{30}{13} - \frac{6}{13}i$.

Zadatak 2. U ovisnosti o pozitivnom realnom parametru p riješi nejednadžbu

$$\frac{x}{p} - \frac{2p}{x} < 2.$$

RJEŠENJE:

Uvjet je $x \neq 0$. Promatramo 2 slučaja $x > 0$ i $x < 0$. Nejednadžbu napišemo u obliku

$$\frac{x^2 - 2p^2}{px} < 2. \quad (*)$$

1° Za slučaj $x > 0$ iz (*) dobijemo:

$$x^2 - 2p^2 < 2px$$

$$(x - p)^2 < 3p^2$$

$$|x - p| < p\sqrt{3}$$

tj.

$$x \in (p(1 - \sqrt{3}), p(1 + \sqrt{3})).$$

Zbog uvjeta $x > 0$ imamo samo $x \in (0, p(1 + \sqrt{3}))$.

2° Za slučaj $x < 0$ iz (*) dobijemo:

$$x^2 - 2p^2 > 2px$$

$$(x - p)^2 > 3p^2$$

$$|x - p| > p\sqrt{3}$$

$$-x + p > p\sqrt{3}$$

$$x < p(1 - \sqrt{3})$$

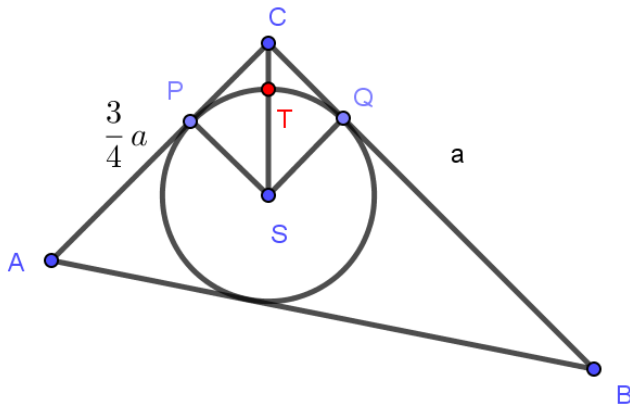
tj.

$$x \in (-\infty, p(1 - \sqrt{3}))$$

Nejednadžbu zadovoljava unija ova dva skupa $x \in (-\infty, p(1 - \sqrt{3})) \cup (0, p(1 + \sqrt{3}))$.

Zadatak 3. U pravokutnom trokutu ABC , kojem su duljine kateta $|CB| = a$, $|CA| = \frac{3}{4}a$ upisana je kružnica k . Nadite udaljenost vrha C od točke kružnice k koja je najbliža točki C .

RJEŠENJE:



Najbliža točka kružnice $k(S, r)$ točki C jest točka T u kojoj polupravac SC siječe k .

Označimo li s P i Q dirališta kružnice k na katetama, tada je četverokut $PSQC$ kvadrat, zato je $|CS| = \sqrt{2}r$, pa je $|CT| = \sqrt{2}r - r = r(\sqrt{2} - 1)$.

Polumjer pravokutnom trokutu upisane kružnice jednak je $r = \frac{a+b-c}{2}$. U našem slučaju je $r = \frac{a + \frac{3}{4}a - \sqrt{a^2 + \frac{9}{16}a^2}}{2}$, tj. $r = \frac{1}{4}a$, pa je tražena udaljenost $|CT| = \frac{1}{4}a(\sqrt{2} - 1)$.

Zadatak 4. Odredi sve prirodne brojeve a, b, c takve da je

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1.$$

RJEŠENJE:

Pokažimo najprije da barem jedan od pribrojnika mora biti veći ili jednak $\frac{1}{3}$. U protivnom bi svi bili strogo manji od $\frac{1}{3}$, iz čega proizlazi $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} < 1$, što je kontradikcija.

Stoga, bez gubitka općenitosti možemo pretpostaviti da je $\frac{1}{ab} \geq \frac{1}{3}$, tj. $ab \leq 3$. Svi parovi (a, b) prirodnih brojeva s tim svojstvom su $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$. Odredimo u tim slučajevima c (ako postoji), tako da vrijedi zadana jednadžba.

Za par $(1, 1)$ c ne postoji, za parove $(1, 3)$ i $(3, 1)$ $c = 2$.

Prema tome, sva rješenja su uređene trojke:

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).$$

3. RAZRED

Zadatak 1. Odredi sve x, y za koje vrijedi

$$\begin{cases} 7(\log_y x + \log_x y) = 50 \\ xy = 256 \end{cases}.$$

RJEŠENJE:

Za prvu jednadžbu uvjeti su $x > 0, y > 0$ i $x \neq 1, y \neq 1$.
Sređivanjem se dobiva jednadžba

$$\frac{1}{\log_x y} + \log_x y = \frac{50}{7}$$

Supstitucijom $\log_x y = t$ i sređivanjem dobijemo jednadžbu $7t^2 - 50t + 7 = 0$,

čija su rješenja $t_1 = 7, t_2 = \frac{1}{7}$.

Za $t_1 = 7$ imamo

$$\log_x y = 7 \Rightarrow y = x^7,$$

te dobijemo sustav

$$\begin{cases} y = x^7 \\ xy = 256 \end{cases}$$

čije je rješenje $(x, y) = (2, 128)$.

Za $t_2 = \frac{1}{7}$ imamo

$$\log_x y = \frac{1}{7} \Rightarrow y = x^{\frac{1}{7}},$$

te dobijemo sustav

$$\begin{cases} x = y^7 \\ xy = 256 \end{cases}$$

čije je rješenje $(x, y) = (128, 2)$.

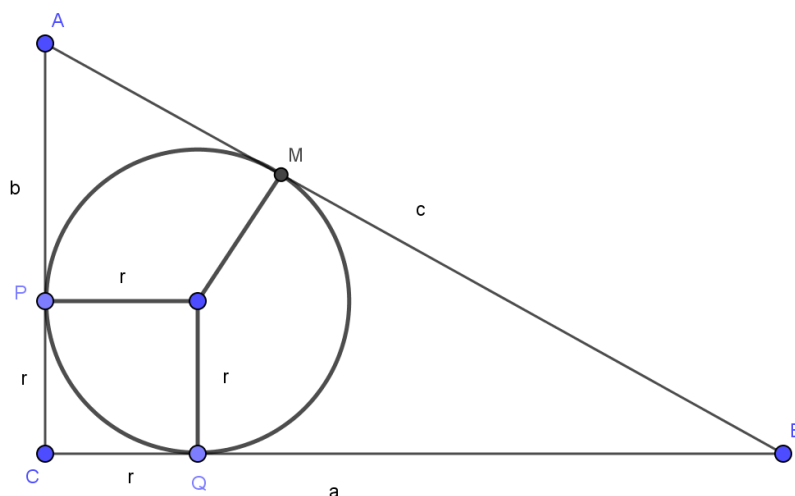
Zadatak 2. Ako su x, y, a, b realni brojevi za koje vrijedi $tg x + tg y = tg a$,
 $ctg x + ctg y = ctg b$, $x + y = \frac{\pi}{4}$, izračunaj $ctg a - tg b$.

RJEŠENJE:

$$\begin{aligned}ctg a - tg b &= \frac{1}{tg x + tg y} - \frac{1}{ctg x + ctg y} \\&= \frac{1}{tg x + tg y} - \frac{tg x + tg y}{tg x + tg y} \\&= \frac{1 - tg x tg y}{tg x + tg y} \\&= \frac{1}{tg (x + y)} \\&= \frac{1}{tg \frac{\pi}{4}} \\&= 1\end{aligned}$$

Zadatak 3. Baza trostrane piramide je pravokutni trokut s katetama duljina 12 i 35.
Sve pobočke zatvaraju s ravninom baze kut od 60° . Odredi oplošje piramide.

RJEŠENJE:



Pomoću Pitagorina poučka dobijemo da je hipotenuza baze $c = \sqrt{12^2 + 35^2} = 37$.

U pravokutnom trokutu sa katetama a i b i hipotenuzom c promjer upisane kružnice je $2r = a + b - c$.

Prema slici $c = |AM| + |BM| = |BQ| + |AP| = a - r + b - r$ tj. $c = a + b - 2r$. Na osnovi toga je polumjer upisane kružnice jednak $r = \frac{35+12-37}{2} = 5$.

Slijedi da je visina svake bočne strane piramide jednaka $2 \cdot 5 = 10$. Oplošje piramide je

$$O = B + P = \frac{12 \cdot 35}{2} + \frac{10(35 + 12 + 37)}{2} = 210 + 420 = 630.$$

Zadatak 4. Tri učenika riješila su ukupno 100 zadataka, pri čemu je svaki riješio po 60 zadataka. Zadatak se smatra teškim ako ga je riješio samo jedan učenik, a lakim ako su ga riješila sva trojica učenika. Dokazati da je teških zadataka bilo za 20 više od lakih.

RJEŠENJE:

Označimo sa x, y, z brojeve zadataka koje je redom riješio samo prvi, samo drugi i samo treći učenik. Sa p, q, r označimo brojeve zadataka koje su riješila samo prva dvojica učenika, samo drugi i treći, odnosno samo prvi i treći učenik. Sa s označimo broj zadataka koje su riješila sva tri učenika.

Prema oznakama imamo:

$$\begin{cases} x + y + z + p + q + r + s = 100 \\ x + p + r + s = 60 \\ y + p + q + s = 60 \\ z + q + r + s = 60 \end{cases} .$$

Lakih zadataka ima s , a teških $x + y + z$.

Prvu jednadžbu pomnožimo s 2 i od toga oduzmemo ostale, te dobijemo

$$(x + y + z) - s = 200 - 180 = 20,$$

što je trebalo dokazati (teški – laki zadatci).

4. RAZRED

Zadatak 1. Tri broja čine geometrijski niz. Ako drugi broj uvećamo za 8, tada ti brojevi čine aritmetički niz. Ako poslije toga posljednji broj uvećamo za 64 tada niz ponovo postaje geometrijski. Odredi te brojeve.

RJEŠENJE:

Označimo sa x, y, z dane brojeve. Iz uvjeta zadatka slijedi

$$y^2 = x \cdot z$$

$$y + 8 = \frac{x + z}{2}$$

$$(y + 8)^2 = x \cdot (z + 64).$$

Iz prve i treće jednadžbe imamo:

$$xz + 16y + 64 = xz + 64x,$$

odnosno

$$y = 4x - 4.$$

Uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobijemo

$$z = 7x + 8.$$

Dobivene izraze za y i z uvrstimo u prvu jednadžbu i dobijemo

$$9x^2 - 40x + 16 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su $x_1 = 4$ i $x_2 = \frac{4}{9}$, pa su rješenja zadatka:

$$(4, 12, 36) \text{ i } \left(\frac{4}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{100}{9}\right).$$

Zadatak 2. Odredi u Gaussovoj ravnini skup kompleksnih brojeva za koje je $z^2 + z + 1$ pozitivan realan broj.

RJEŠENJE:

Prema uvjetu zadatka $z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}^+$, pa slijedi

$$z^2 + z + 1 = (x + iy)^2 + x + iy + 1 = \underbrace{x^2 - y^2 + x + 1}_{>0} + i \underbrace{(2xy + y)}_{=0}.$$

Iz $2xy + y = 0$ imamo

1° $y = 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (točke na x osi u Gaussovoj ravnini)

2° $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} - y^2 - \frac{1}{2} + 1 > 0 \Leftrightarrow y^2 < \frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2} < y < \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow y \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(spojnica točaka $T_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ i $T_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ bez točaka T_1 i T_2)

Zadatak 3. Odredi brojeve a, b, c, d takve da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$a \binom{n}{1} + b \binom{n}{2} + c \binom{n}{3} + d \binom{n}{4} = n^4.$$

RJEŠENJE:

Raspišimo zadani izraz

$$a \cdot n + b \cdot \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} + c \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} + d \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = n^4$$

Nakon sređivanja dobijemo

$$24an + 12b(n^2 - n) + 4c(n^3 - 3n^2 + 2n) + d(n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n) = 24n^4$$

odnosno

$$dn^4 + (4c - 6d)n^3 + (12b - 12c + 11d)n^2 + (24a - 12b + 8c - 6d)n = 24n^4.$$

S lijeve i desne strane nalaze se polinomi po nepoznatici n . Da bi vrijedila jednakost moraju im odgovarajući koeficijenti biti jednaki, te slijedi:

$$d = 24$$

$$4c - 6d = 0 \Rightarrow c = 36$$

$$12b - 12c + 11d = 0 \Rightarrow b = 14$$

$$24a - 12b + 8c - 6d = 0 \Rightarrow a = 1$$

Zadatak 4. Prikazi jednog prirodnog broja n u sustavima s bazama 7 i 9 imaju tri iste znamenke ali u obrnutim poredcima. Odredi sve takve brojeve.

RJEŠENJE:

Uvjet zadatka možemo zapisati kao

$$(abc)_7 = (cba)_9$$

odnosno

$$7^2a + 7b + c = 9^2c + 9b + a.$$

Nakon sređivanja dobijemo

$$48a - 80c - 2b = 0,$$

$$b = 8(3a - 5c).$$

Slijedi da $8|b$, no kako je $b < 7$ (jer je b znamenka u sustavu 7) mora biti $b = 0$, pa je $3a = 5c$, odnosno (jer su $a, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$), $a = 5$ i $c = 3$. Rješenje $a = b = 0$ dalo bi nulu, a to nije prirodan broj.

Znači, traženi broj je

$$503_7 = 305_9 = 248_{10}.$$

ZADATKE PRIPREMILA

dr. IVANA ZUBAC

NATJECATELJSKA KOMISIJA – SŠ

1. MARINKO ANTUNOVIĆ, prof.
2. Dr. IVANA ZUBAC

REZULTATI

NATJECANJA IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH

Tomislavgrad, 9. travanj 2022.

I. razred

- 1. Dragan Boban - Gimnazija fra Grge Martića Mostar**
- 2. Petra Lasić – Gimnazija Mostar**
- 3. Filip Krištić – Opća-realna gimnazija KŠC „Sv. Josip“ Sarajevo**

II. razred

- 1. Magdalena Grbavac - Gimnazija fra Grge Martića Mostar**
- 2. Robert Bakula – S.Š. fra Grge Martića Posušje**
- 3. Tarik Beganović – S.Š. Ivan Goran Kovačić Kiseljak**

III. razred

- 1. Leona Marijanović - Gimnazija fra Grge Martića Mostar**
- 2. Dominik Ivančević – S.Š. Prozor**
- 3. Mia Cvijanović – S.Š. Kupres**

IV. razred

- 1. Barbara Glavina - Gimnazija fra Grge Martića Mostar**
- 2. Mario Vukoja - Gimnazija fra Grge Martića Mostar**
- 3. Zoran Jurić – Opća gimnazija KŠC „Don Bosco“ Žepče**

POPIS

UČENIKA KOJI SU SE PLASIRALI NA MATEMATIČKU OLIMPIJADU BIH

Banja Luka, 15. i 16. svibnja 2022.

- 1. Dragan Boban - Gimnazija fra Grge Martića Mostar**
- 2. Magdalena Grbavac - Gimnazija fra Grge Martića Mostar**
- 3. Leona Marijanović - Gimnazija fra Grge Martića Mostar**
- 4. Dominik Ivančević – S.Š. Prozor**
- 5. Mia Cvijanović – S.Š. Kupres**
- 6. Barbara Glavina - Gimnazija fra Grge Martića Mostar**
- 7. Mario Vukoja - Gimnazija fra Grge Martića Mostar**
- 8. Zoran Jurić – Opća gimnazija KŠC „Don Bosco“ Žepče**
- 9. Amina Bajramović – Opća gimnazija KŠC „Sveti Pavao“ Zenica**
- 10. Teodora Andelić - Gimnazija fra Grge Martića Mostar**

ŽUPANIJSKA NATJECANJA IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA HNŽ I HBŽ

VIII. i IX. razreda održana su 2. travnja 2022. (Mostar i Livno)

VI. i VII. razreda održano je 28. svibnja 2022. (Livno)

PROGRAM NATJECANJA

Do 9:00	Dolazak sudionika natjecanja u zgradu škole domaćina
9:45	Otvaranje natjecanja
10:00-11:30	Natjecanje učenika – izrada zadataka
11:00-13:00	Rad komisija – pregled učeničkih radova
13:00	Neslužbeni rezultati natjecanja (pod šiframa)
13:30	Službeni rezultati natjecanja, dodjela diploma i nagrada najuspješnijim učenicima

ZADACI

8. RAZRED

- Koliki je omjer brojeva a i b , ako su a i b zadani s $a = \frac{7}{4} : 0.5 + \frac{10}{9} \cdot \left(3\frac{1}{4} + \frac{4}{5}\right)$,
 $2\frac{2}{3} : \left[b - \frac{3}{5} \left(\frac{2.5 - 7 : 3.5}{8 \cdot 0.125} - 1.5\right)\right] = \frac{2}{3}$.
- Odredi x, y, z ako je $\frac{37}{13} = 2 + \frac{1}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}}$.
- Otac i majka zajedno imaju 80 godina. Njihova djeca imaju 13, 10 i 6 godina. Za nekoliko godina zbroj godina djece bit će 59% zbroja godina oca i majke. Koliko će godina tada imati otac, a koliko majka ako je majka 4 godine mlađa od oca?
- Svakim vrhom šiljastokutnog trokuta ABC nacrtan je pravac paralelan s nasuprotnom stranicom. Na nacrtanoj slici može se uočiti izvjestan broj paralelograma. Zbroj opsega svih tako nastalih paralelograma je 60 cm. Odredi opseg trokuta ABC .

9. RAZRED

1. U skupu racionalnih brojeva riješi sljedeće jednačbe $x^2 - 2.\dot{3} = 1.\dot{6}$ i $0.\dot{6}y^2 = 1.5$.
2. Izračunaj $\sqrt{666^2 + 888^2}$.
3. Ako duljinu katete AC pravokutnog trokuta ABC smanjimo za $3cm$, a duljinu katete BC povećamo za $9cm$, dobijemo pravokutni trokut čija je duljina hipotenuze jednaka duljine hipotenuze AB trokuta ABC . Isto vrijedi ako duljinu katete AC smanjimo za $20cm$, a duljinu katete BC povećamo za $40cm$. Izračunati duljine stranica trokuta ABC .
4. Odredi sve parove cijelih brojeva x i y za koje vrijedi $x^2 \cdot |y| = 2009$.

RJEŠENJA

8. RAZRED

Zadatak 1. Koliki je omjer brojeva a i b , ako su a i b zadani s $a = \frac{7}{4} : 0.5 + \frac{10}{9} \cdot \left(3\frac{1}{4} + \frac{4}{5}\right)$,
 $\frac{2}{3} : \left[b - \frac{3}{5} \left(\frac{2.5 - 7 : 3.5}{8 \cdot 0.125} - 1.5\right)\right] = \frac{2}{3}$.

RJEŠENJE:

$$a = \frac{7}{4} : 0.5 + \frac{10}{9} \cdot \left(3\frac{1}{4} + \frac{4}{5}\right) = \frac{7}{4} : \frac{1}{2} + \frac{10}{9} \cdot \left(\frac{13}{4} + \frac{4}{5}\right) = \frac{7}{4} \cdot \frac{2}{1} + \frac{10}{9} \cdot \frac{81}{20} = 8$$

$$\frac{8}{3} : \left[b - \frac{3}{5} \left(\frac{\frac{25}{10} - 7 : \frac{35}{10}}{8 \cdot \frac{125}{1000}} - \frac{15}{10}\right)\right] = \frac{2}{3}$$

$$\frac{8}{3} : \left[b - \frac{3}{5} \left(\frac{5}{2} - 7 \cdot \frac{2}{7} - \frac{3}{2}\right)\right] = \frac{2}{3}$$

$$\frac{8}{3} : \left[b - \frac{3}{5} \cdot (-1)\right] = \frac{2}{3}$$

$$\frac{8}{3} : \left[b + \frac{3}{5}\right] = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \left[b + \frac{3}{5} \right] = \frac{8}{3}$$

$$b + \frac{3}{5} = 4$$

$$b = \frac{17}{5}$$

Znači, omjer je $\frac{a}{b} = \frac{40}{17}$.

Zadatak 2. Odredi x, y, z ako je $\frac{37}{13} = 2 + \frac{1}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}}$.

RJEŠENJE:

$$\frac{37}{13} = 2 + \frac{11}{13} = 2 + \frac{1}{\frac{13}{11}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{11}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{11}{2}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}}}$$

Slijedi da je

$$x = 1$$

$$y = 5$$

$$z = 2$$

Zadatak 3. Otac i majka zajedno imaju 80 godina. Njihova djeca imaju 13, 10 i 6 godina. Za nekoliko godina zbroj godina djece bit će 59% zbroja godina oca i majke. Koliko će godina tada imati otac, a koliko majka ako je majka 4 godine mlađa od oca?

RJEŠENJE:

Za nekoliko – x godina:

- Djeca: $13 + x, 10 + x, 6 + x$
- Otac i majka zajedno: $80 + 2x$

Zbroj godina djece je 59% zbroja godina oca i majke:

$$(13 + x) + (10 + x) + (6 + x) = \frac{59}{100}(80 + 2x)$$

$$29 + 3x = \frac{59}{100} \cdot 80 + \frac{59}{100} \cdot 2x \quad / \cdot 100$$

$$2900 + 300x = 4720 + 118x$$

$$182x = 1820$$

$$x = 10$$

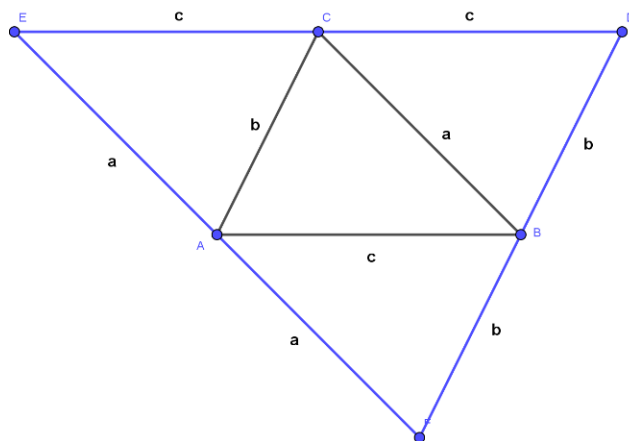
Ako očeve godine označimo sa a , a majčine sa $a - 4$, vrijedi: $a + (a - 4) = 80$, $a = 42$.

Otac sada ima 42 godine, a majka 38, te će za 10 godina otac imati 52, a majka 48 godina.

Zadatak 4. Svakim vrhom šiljastokutnog trokuta ABC nacrtan je pravac paralelan s nasuprotnom stranicom. Na nacrtanoj slici može se uočiti izvjestan broj paralelograma. Zbroj opsega svih tako nastalih paralelograma je 60 cm. Odredi opseg trokuta ABC.

RJEŠENJE:

Neka su a , b , i c duljine stranica trokuta ABC. Očito su na slici 3 paralelograma ABCE, ABDC i AFBC.



$$\text{Za } ABCD \Rightarrow O = 2a + 2c$$

$$\text{Za } ABDC \Rightarrow O = 2b + 2c$$

$$\text{Za } AFBC \Rightarrow O = 2a + 2b$$

Slijedi da je

$$2a + 2b + 2a + 2c + 2b + 2c = 60$$

$$4a + 4b + 4c = 60 \quad / : 4$$

Pa je opseg trokuta ABC jednak

$$a + b + c = 15.$$

9. RAZRED

Zadatak 1. U skupu racionalnih brojeva riješi sljedeće jednačbe $x^2 - 2.\dot{3} = 1.\dot{6}$ i $0.\dot{6}y^2 = 1.5$.

RJEŠENJE:

Kako je:

$$\begin{cases} 2.\dot{3} = 2.333333 \dots = 2\frac{1}{3} \\ 1.\dot{6} = 1.666666 \dots = 1\frac{2}{3} \\ 0.\dot{6} = 0.666666 \dots = \frac{2}{3} \end{cases}$$

iz prve jednačbe dobijemo:

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{7}{3} &= \frac{5}{3} \\ x^2 &= 4 \\ x_{1,2} &= \pm 2 \end{aligned}$$

Iz druge jednačbe dobijemo:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}y^2 &= \frac{3}{2} \\ y^2 &= \frac{9}{4} \\ y_{1,2} &= \pm \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Zadatak 2. Izračunaj $\sqrt{666^2 + 888^2}$.

RJEŠENJE:

Kako je

$$\sqrt{666^2 + 888^2} = \sqrt{(6 \cdot 111)^2 + (8 \cdot 111)^2} = \sqrt{111^2 \cdot (6^2 + 8^2)} = \sqrt{111^2 \cdot 10^2}$$

vrijedi

$$\sqrt{666^2 + 888^2} = 111 \cdot 10 = 1110.$$

Zadatak 3. Ako duljinu katete AC pravokutnog trokuta ABC smanjimo za 3cm , a duljinu katete BC povećamo za 9cm , dobijemo pravokutni trokut čija je duljina hipotenuze jednaka duljine hipotenuze AB trokuta ABC . Isto vrijedi ako duljinu katete AC smanjimo za 20cm , a duljinu katete BC povećamo za 40cm . Izračunati duljine stranica trokuta ABC .

RJEŠENJE:

Označimo duljine kateta AC i BC , sa b i a . Prema uvjetima zadatka dobijemo sustav:

$$\begin{cases} (b-3)^2 + (a+9)^2 = a^2 + b^2 \\ (b-20)^2 + (a+40)^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} b^2 - 6b + 9 + a^2 + 18a + 81 = a^2 + b^2 \\ b^2 - 40b + 400 + a^2 + 80a + 1600 = a^2 + b^2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3a - b = -15 \\ 2a - b = -50 \end{cases}$$

Rješenja sustava su $a = 35\text{cm}$, $b = 120\text{cm}$, a primjenom Pitagorinog poučka dobijemo da je $c = 125\text{cm}$.

Zadatak 4. Odredi sve parove cijelih brojeva x i y za koje vrijedi $x^2 \cdot |y| = 2009$.

RJEŠENJE: Rastav broja 2009 na faktore je:

$$\begin{aligned} 49 \cdot 41 &= 2009 \\ 7 \cdot 287 &= 2009 \\ 1 \cdot 2009 &= 2009 \end{aligned}$$

U drugom slučaju niti jedan od brojeva 7 i 287 ne može biti kvadrat nekog cijelog broja, te imamo da je

$$x^2 = 49, |y| = 41$$

ili

$$x^2 = 1, |y| = 2009.$$

Prema tome, sva rješenja u skupu cijelih brojeva su:

$(7, 41), (7, -41), (-7, 41), (-7, -41), (1, 2009), (1, -2009), (-1, 2009), (-1, -2009)$.

REZULTATI

županijskih natjecanja iz matematike učenika VIII. i IX. razreda osnovnih škola HNŽ i HBŽ održanih 2. travnja 2022.

VIII. razred HNŽ - Mostar

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Ema Čubela	O.Š. Ivana Gundulića Mostar
II. mjesto	Dorja Komadina	O.Š. Ilije Jakovljevića Mostar
III. mjesto	Ivo Planinić	Međunarodna osnovna škola Mostar

IX. razred

I. mjesto	Matea Čuljak	O.Š. Vladimira Pavlovića Čapljina
II. mjesto	Tin Planinić	O.Š. Ilije Jakovljevića Mostar
III. mjesto	Ana Ostojić	O.Š. fra Didaka Buntića Čitluk

VIII. razred HBŽ - Livno

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Franka Karaula	O.Š. Fra Lovro Karaula Livno
II. mjesto	Iva Pokrajčić	O.Š. Fra Mije Čuića Bukovica
III. mjesto	Ana Skočibušić	O.Š. Fra Mije Čuića Bukovica

IX. razred

I. mjesto	Josip Barun	O.Š. Ivan Goran Kovačić Livno
II. mjesto	Alma Softić	O.Š. Fra Lovro Karaula Livno
III. mjesto	Matej Boban	O.Š. Ivan Goran Kovačić Livno

POPIS

UČENIKA KOJI SU SE PLASIRALI NA JUNIORSKU MATEMATIČKU OLIMPIJADU BIH

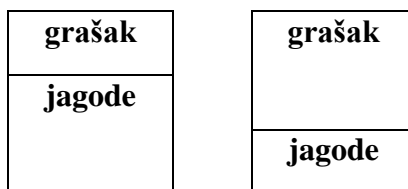
Sarajevo, 21. svibnja 2022.

1. Ema Čubela - O.Š. Ivana Gundulića Mostar
2. Franka Karaula - O.Š. Fra Lovro Karaula Livno
3. Matea Čuljak - O.Š. Vladimira Pavlovića Čapljina
4. Josip Barun - O.Š. Ivan Goran Kovačić Livno

Z A D A C I

6. RAZRED

1. Izračunaj: $-30 \cdot \{11 - 2 \cdot [1 + 5 \cdot 13 - 5 \cdot (6 \cdot 7 - 131)]\} : 15 = ?$
2. Zbroj pet uzastopnih parnih prirodnih brojeva jednak je 6080. Koji su to brojevi?
3. Gospodin Bobić uzgaja grašak i jagode. Ove je godine pravokutno polje graška produljio za 3 metra, čime je ono poprimilo kvadratni oblik, a zbog toga se površina polja s jagodama smanjila za $15 m^2$. Kolika je bila početna površina polja graška?



4. Perica ima u štednoj kasici 250 KM novčića od 1, 2, 5 maraka. Novčića od 5 KM dva put je više nego onih od 2 KM, a novčića od 1 KM dva puta je manje nego onih od po 2 KM. Koliko novčića po 5 KM ima Perica?

7. RAZRED

1. Izračunaj:
$$\frac{0,75 + \left(\frac{1}{3} + 0,5\right) : \frac{5}{9}}{\left(\frac{2}{3} - 0,4 + \frac{1}{6}\right) \cdot 2,5 - \frac{1}{12}} = ?$$
2. Odredi sve cijele brojeve n za koje je razlomak $\frac{n+2}{n-2}$ cijeli broj.
3. Sestra je starija od brata 4 godine. Za godinu dana omjer njihovih godina će biti 3:4. Koliko godina ima sestra?
4. Zadan je trokut ABC kojemu je dužina \overline{BH} visina, a pravac AD simetrala kuta CAB . Tupa kut između pravaca BH i AD četiri je puta veći od kuta DAB . Kolika je mjera kuta CAB ?

RJEŠENJA

6. RAZRED

Zadatak 1. Izračunaj: $-30 \cdot \{11 - 2 \cdot [1 + 5 \cdot 13 - 5 \cdot (6 \cdot 7 - 131)]\} : 15 = ?$

RJEŠENJE:

$$\begin{aligned} & -30 \cdot \{11 - 2 \cdot [1 + 5 \cdot 13 - 5 \cdot (6 \cdot 7 - 131)]\} : 15 = \\ & -30 \cdot \{11 - 2 \cdot [1 + 65 - 5 \cdot (42 - 131)]\} : 15 = \\ & -30 \cdot \{11 - 2 \cdot [66 - 5 \cdot (-89)]\} : 15 = \\ & -30 \cdot \{11 - 2 \cdot [66 + 445]\} : 15 = \\ & -30 \cdot \{11 - 2 \cdot 511\} : 15 = \\ & -30 \cdot \{11 - 1022\} : 15 = \\ & -30 \cdot (-1011) : 15 = \\ & 30330 : 15 = 2022. \end{aligned}$$

Zadatak 2. Zbroj pet uzastopnih parnih prirodnih brojeva jednak je 6080. Koji su to brojevi?

RJEŠENJE:

Neka su $x, x + 2, x + 4, x + 6, x + 8$ pet uzastopnih parnih prirodnih brojeva.

$$x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) + (x + 8) = 6080$$

$$5x + 20 = 6080$$

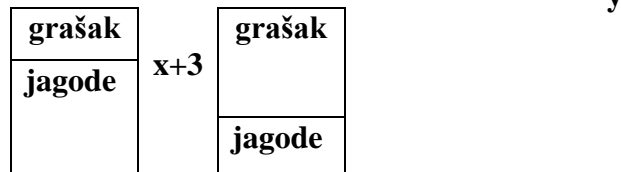
$$5x = 6060$$

$$x = 6060 : 5$$

$$x = 1212.$$

Traženi brojevi su: 1212, 1214, 1216, 1218, 1220

Zadatak 3. Gospodin Bobić uzgaja grašak i jagode. Ove je godine pravokutno polje graška produljio za 3 metra, čime je ono poprimilo kvadratni oblik, a zbog toga se površina polja s jagodama smanjila za $15 m^2$. Kolika je bila početna površina polja graška?



RJEŠENJE:

Neka je $x + 3$ duljina proširene gredice graška, a y širina gredice.

Polje je produljeno za $3 m$, a površina pod jagodama se smanjila za $15 m^2$,

(P_1 površina proširenog dijela polja)

$$P_1 = y \cdot 3 m$$

$$15m^2 = y \cdot 3m$$

$$y = 5 m$$

znači da je polje široko $5 m$.

Kako je površina proširenog polja graška kvadrat, tada je $x + 3 m = 5 m$, $x = 2 m$.

Duljina gredice prošle godine bila je $2 m$, pa je početna površina polja graška

$$P = 2 \cdot 5 m^2,$$

$$P = 10 m^2.$$

Zadatak 4. Perica ima u štednoj kasici $250 KM$ novčića od $1, 2, 5$ maraka. Novčića od $5 KM$ dva put je više nego onih od $2 KM$, a novčića od $1 KM$ dva puta je manje nego onih od po $2 KM$. Koliko novčića po $5 KM$ ima Perica?

RJEŠENJE:

Neka je: a -broj novčića od $5 KM$, b - broj novčića od $2 KM$, c -broj novčića od $1 KM$.

Novčića od $5 KM$ dva put je više nego onih od $2 KM$, $a = 2b$.

Novčića od $1 KM$ dva puta je manje nego onih od po $2 KM$, $b = 2c$

pa je $a = 2b = 2 \cdot 2c = 4c$.

$$5 \cdot a + 2 \cdot b + 1 \cdot c = 250$$

$$5 \cdot (4c) + 2 \cdot (2c) + c = 250$$

$$20c + 4c + c = 250$$

$$25c = 250$$

$$c = 250 : 25$$

$$c = 10$$

$$a = 4 \cdot c = 40$$

Perica ima četrdeset novčica po 5 KM.

7. RAZRED

Zadatak 1. Izračunaj:

$$\frac{0,75 + \left(\frac{1}{3} + 0,5\right) : \frac{5}{9}}{\left(\frac{2}{3} - 0,4 + \frac{1}{6}\right) \cdot 2,5 - \frac{1}{12}} = ?$$

RJEŠENJE:

$$\frac{0,75 + \left(\frac{1}{3} + 0,5\right) : \frac{5}{9}}{\left(\frac{2}{3} - 0,4 + \frac{1}{6}\right) \cdot 2,5 - \frac{1}{12}} =$$

$$\frac{\frac{75}{100} + \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{10}\right) : \frac{5}{9}}{\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{10} + \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{25}{10} - \frac{1}{12}} =$$

$$\frac{\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) : \frac{5}{9}}{\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{5}{2} - \frac{1}{12}} =$$

$$\frac{\frac{3}{4} + \frac{5}{6} : \frac{5}{9}}{\frac{20 - 12 + 5}{30} \cdot \frac{5}{2} - \frac{1}{12}} =$$

$$\frac{\frac{3}{4} + \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{5}}{\frac{13}{30} \cdot \frac{5}{2} - \frac{1}{12}} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{2}}{\frac{13}{12} - \frac{1}{12}} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{12}{12}} = \frac{9}{4}$$

Zadatak 2. Odredi sve cijele brojeve n za koje je razlomak $\frac{n+2}{n-2}$ cijeli broj.

RJEŠENJE:

$$\frac{n+2}{n-2} = \frac{n-2+4}{n-2} = \frac{n-2}{n-2} + \frac{4}{n-2} = 1 + \frac{4}{n-2}; \text{ uvjet: } n - 2 \neq 0 \Rightarrow n \neq 2$$

Da bi izraz $1 + \frac{4}{n-2}$ bio cijeli broj, razlomak $\frac{4}{n-2}$ mora biti cijeli broj, a to znači da nazivnik $n - 2$ mora biti cijelobrojni djeljitelj broja 4.

Kako je broj 4 djeljiv cijelim brojevima $-4, -2, -1, 1, 2$ i 4 slijedi:

$$n - 2 = -4 \Rightarrow n = -2$$

$$n - 2 = -2 \Rightarrow n = 0$$

$$n - 2 = -1 \Rightarrow n = 1$$

$$n - 2 = 1 \Rightarrow n = 3$$

$$n - 2 = 2 \Rightarrow n = 4$$

$$n - 2 = 4 \Rightarrow n = 6$$

Zadatak 3. Sestra je starija od brata 4 godine. Za godinu dana omjer njihovih godina će biti 3:4. Koliko godina ima sestra?

RJEŠENJE:

x – godine starosti sestre

y – godine starosti brata

Kako je sestra starija od brata 4 godine imamo da je $y = x - 4$.

Za godinu dana sestra će imati $x + 1$ godinu a brat $x - 3$ godine. Prema tekstu zadatka tada će omjer njihovih godina biti

$$\frac{x - 3}{x + 1} = \frac{3}{4}$$

$$4(x - 3) = 3(x + 1)$$

$$4x - 12 = 3x + 3$$

$$x = 15$$

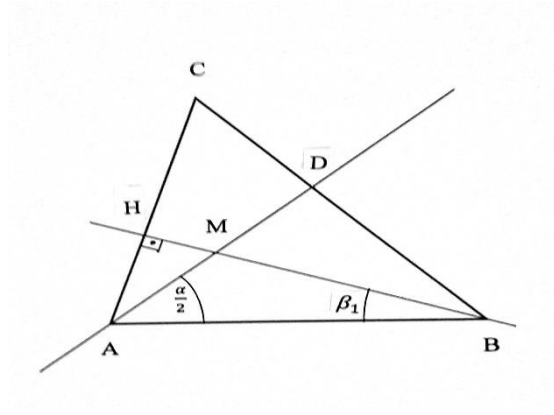
Sestra ima 15 godina.

Zadatak 4. Zadan je trokut ABC kojemu je dužina \overline{BH} visina, a pravac AD simetrala kuta CAB . Tupa kut između pravaca BH i AD četiri je puta veći od kuta DAB . Kolika je mjera kuta CAB ?

RJEŠENJE:

Sjecište simetrale kuta CAB i pravca određenog visinom \overline{BH} označimo sa M .

U trokutu BMA kut pri vrhu B označimo s β_1 .



Kako je $|\sphericalangle MAB| = \frac{\alpha}{2}$ slijedi da je $|\sphericalangle AMB| = 4 \cdot \frac{\alpha}{2} = 2\alpha$.

Tada je $2\alpha + \frac{\alpha}{2} + \beta_1 = 180^\circ \Rightarrow \frac{5}{2}\alpha + \beta_1 = 180^\circ \Rightarrow \beta_1 = 180^\circ - \frac{5}{2}\alpha$. (1)

U trokutu BHA je $\beta_1 + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \beta_1 = 90^\circ - \alpha$. (2)

Iz (1) i (2) slijedi:

$$90^\circ - \alpha = 180^\circ - \frac{5}{2}\alpha$$

$$\frac{5}{2}\alpha - \alpha = 180^\circ - 90^\circ$$

$$\frac{3}{2}\alpha = 90^\circ$$

$$3\alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$|\sphericalangle CAB| = 60^\circ$

REZULTATI

županijskog natjecanja iz matematike učenika VI. i VII. razreda osnovnih škola HBŽ održanih 28. svibnja 2022.

VI. razred

HBŽ - Livno

Osvojeno mjesto	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto
I. mjesto	Marko Buljan	O.Š. Fra Mije Čuića Bukovica
II. mjesto	Mijo Ivić	O.Š. Fra Miroslava Džaje Kupres
III. mjesto	Antonio Matković	O.Š. Fra Lovro Karaula Livno

VII. razred

I. mjesto	Mihaela Vrgoč	O.Š. Fra Lovro Karaula Livno
II. mjesto	Mateo Marijan	O.Š. Fra Lovro Karaula Livno
III. mjesto	Petar Čurić	O.Š. Fra Mije Čuića Bukovica

ZADATKE PRIPREMILI

dr. IVANA ZUBAC..... 8. i 9. razred

MARINKO ANTUNOVIĆ, prof. 6. i 7. razred

ŽUPANIJSKA NATJECANJA SU PROVELI:

Ilija Jezidžić – HBŽ

Dr. Ivana Zubac – HNŽ

**ZAHVALJUJEMO SPONZORIMA KOJI SU POMOGLI
ORGANIZIRANJE NATJECANJA MLADIH MATEMATIČARA
UČENIKA OSNOVNIH I SREDNJIH ŠKOLA U BIH**

- **Ministarstvu znanosti, prosvjete, kulture i športa HBŽ**
- **Ministarstvu prosvjete, znanosti, kulture i športa ŽZH**
- **Predsjedniku Federacije BiH gospodinu Marinku Čavari**
- **Načelniku Općine Žepče**
- **Načelniku općine Tomislavgrad**
- **Gradonačelniku Grada Mostar**
- **Eagle Technology d.o.o. Žepče**
- **HT Eronet Mostar**
- **Restoran California Žepče**
- **TING d.o.o. Žepče**
- **Katarina d.o.o Mostar**
- **Antonio Commerce d.o.o Mostar**
- **Školska naklada d.o.o Mostar**
- **Config d.o.o Mostar**
- **Guma M Mostar**
- **Superstar d.o.o. Mostar**

BILTEN uredio Marinko Antunović, prof.

Lipanj, 2022.