

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH Mostar, 30. ožujka 2019.

I. RAZRED

Zadatak 1. Ako su a, b, c i d pozitivni realni brojevi takvi da je $\frac{7a+b}{7c+d} = \frac{8a+b}{8c+d}$ i $\frac{9a+b}{9c+d} = 5$ izračunati $\frac{11a+b}{11c+d}$.

RJEŠENJE:

$$\text{Iz } \frac{7a+b}{7c+d} = \frac{8a+b}{8c+d} \Rightarrow \frac{8c+d}{7c+d} = \frac{8a+b}{7a+b} \Rightarrow 1 + \frac{c}{7c+d} = 1 + \frac{a}{7a+b} \Rightarrow \frac{c}{7c+d} = \frac{a}{7a+b} \Rightarrow$$

$$\frac{7c+d}{c} = \frac{7a+b}{a} \Rightarrow \frac{d}{c} = \frac{b}{a} = k$$

dobijemo $d = kc, b = ka$.

$$\text{Uvrstimo u } \frac{9a+b}{9c+d} = 5 \text{ i dobijemo } \frac{9a+ka}{9c+kc} = \frac{a(9+k)}{c(9+k)} = \frac{a}{c} = 5.$$

$$\text{Istim postupkom dobijemo } \frac{11a+b}{11c+d} = \frac{11a+ka}{11c+kc} = \frac{a}{c} = 5.$$

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Mostar, 30. ožujka 2019.

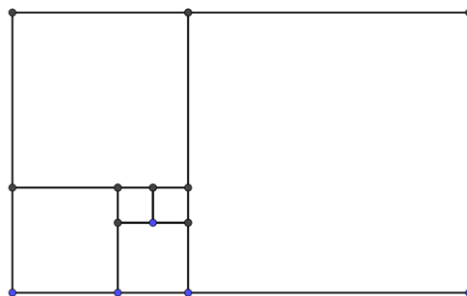
I. RAZRED

Zadatak 2. Da li se ravnina može popločati (potpuno prekriti bez preklapanja) kvadratima od kojih najviše dva mogu imati jednake stranice (rješenje obrazložiti).

RJEŠENJE:

Može.

Neka dva kvadrata stranice 1 imaju zajedničku stranicu, uz njih se doda kvadrat stranice 2, zatim kvadrati stranice 3,5,8,... kao na slici. Stranice kvadrata čine Fibonaccijev niz.



q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Mostar, 30. ožujka 2019.

I. RAZRED

Zadatak 3. Za koje vrijednosti parametra $p \in \mathbb{R}$ jednačba $\frac{5x}{5x^2+px+45} + \frac{x+10}{x^2+5x} = \frac{2}{x}$ nema rješenja?

RJEŠENJE:

Množenjem jednačbe s $x(x+5)(5x^2+px+45)$ dobije se jednačba

$$5x(x^2+5x) + (x+10)(5x^2+px+45) = 2(x+5)(5x^2+px+45),$$

koja je ekvivalentna s polaznom uz uvjete $x \neq 0$, $x+5 \neq 0$, $5x^2+px+45 \neq 0$.

Njenim sređivanjem dobijemo

$$5x(x^2+5x) + (x+10-2x-10)(5x^2+px+45) = 0$$

$$x(5x^2+25x-5x^2-px-45) = 0$$

$$25x^2 - px^2 - 45x = 0 \Rightarrow (25-p)x^2 - 45x = 0.$$

Odmah se vidi da za $p = 25$ jednačba nema rješenja.

Jedino moguće rješenje je $x = \frac{45}{25-p}$.

Lako se utvrdi da je $x+5 = 0$ akko je $p = 34$, te da je $5x^2+px+45 = 0$ također samo za $p = 34$.

Znači, dana jednačba nema rješenja za $p = 25$ i $p = 34$.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Mostar, 30. ožujka 2019.

I. RAZRED

Zadatak 4. Ako se u trokutu zbroje po dvije visine, tri tako dobijena zbroja odnose se kao 27: 32: 35. Odrediti najveći kut trokuta.

RJEŠENJE:

Neka je $v_b + v_c = 27k$, $v_c + v_a = 32k$, $v_a + v_b = 35k$.

Iz prve jednačbe izrazimo $v_c = 27k - v_b$ i uvrstimo u drugu, te dobijemo sustav

$$\begin{cases} v_a + v_b = 35k \\ v_a - v_b = 5k \end{cases}$$

odnosno $v_a = 20k$, $v_b = 15k$, $v_c = 12k$.

Površina trokuta jednaka je $P = \frac{av_a}{2} = \frac{bv_b}{2} = \frac{cv_c}{2}$, tj.

$$a = \frac{2P}{v_a} = \frac{2P}{20k} = 3 \cdot \frac{2P}{60k}, \quad b = \frac{2P}{v_b} = \frac{2P}{15k} = 4 \cdot \frac{2P}{60k}, \quad c = \frac{2P}{v_c} = \frac{2P}{12k} = 5 \cdot \frac{2P}{60k}.$$

Dakle, $a : b : c = 3 : 4 : 5$, pa je zadani trokut pravokutni, tj. najveći kut je pravi kut, 90° .
q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Mostar, 30. ožujka 2019.

II. RAZRED

Zadatak 1. Neka su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe

$$x^2 + (1 - 2m)x + 3m - 5 = 0, \text{ gdje je } m \text{ realan parametar.}$$

a) Odredi parametar $m \in \mathbb{R}$ tako da je $x_1^2 + x_2^2 = 17$.

b) Naći vezu između rješenja ove jednadžbe koja ne zavisi od parametra m .

c) Dokazati da izraz $w = \frac{x_1^2}{1-x_1} + \frac{x_2^2}{1-x_2}$ ne može primiti ni jednu vrijednost iz intervala $(-9 - 2\sqrt{6}, -9 + 2\sqrt{6})$.

RJEŠENJE:

a) Na temelju Vietovih pravila imamo $x_1 + x_2 = 2m - 1$, $x_1x_2 = 3m - 5$. Kako je

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \text{ to je}$$

$$(2m - 1)^2 - 2(3m - 5) = 17, \text{ tj. } 4m^2 - 4m + 1 - 6m + 10 - 17 = 0$$

$$\text{tj. } 4m^2 - 10m - 6 = 0, \text{ tj. } m_1 = -\frac{1}{2}, m_2 = 3.$$

b) Iz $x_1 + x_2 = 2m - 1$, $x_1x_2 = 3m - 5$ imamo $m = \frac{x_1 + x_2 + 1}{2}$ i $m = \frac{x_1x_2 + 5}{3}$.

$$\text{Odakle je } \frac{x_1 + x_2 + 1}{2} = \frac{x_1x_2 + 5}{3} \text{ tj. } 3(x_1 + x_2) - 2x_1x_2 = 7.$$

c) Imamo $w = \frac{x_1^2 - x_1^2x_2 + x_2^2 - x_1x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)} = \frac{(x_1^2 + x_2^2) - x_1x_2(x_1 + x_2)}{1 - (x_1 + x_2) + x_1x_2}$, tj.

$$w = \frac{4m^2 - 10m + 11 - (3m - 5)(2m - 1)}{m - 3} = \frac{4m^2 - 10m + 11 - 6m^2 + 10m + 3m - 5}{m - 3}, \text{ tj.}$$

$$w = \frac{-2m^2 + 3m + 6}{m - 3}$$

Dalje slijedi $wm - 3w = -2m^2 + 3m + 6$, tj. $2m^2 + (w - 3)m - 6 - 3w = 0$. Da ova jednadžba ima realna rješenja nužno je da bude $D = (w - 3)^2 - 8(-6 - 3w) \geq 0$ tj. $w^2 - 6w + 48 + 24w \geq 0$, tj. $w^2 + 18w + 57 \geq 0$, tj. $(w + 9)^2 - 24 \geq 0$ tj. $|w + 9| \geq 2\sqrt{6}$. tj. $w + 9 \leq -2\sqrt{6}$. ili $w + 9 \geq 2\sqrt{6}$,

Dakle, $w \notin (-9 - 2\sqrt{6}, -9 + 2\sqrt{6})$.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Mostar, 30. ožujka 2019.

II. RAZRED

Zadatak 2. Neka su a, b i c duljine stranica trokuta opsega 1. Dokaži da vrijedi

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} < 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

RJEŠENJE:

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $a \geq b \geq c$.

Tada iz nejednakosti trokuta i jednakosti $a + b + c = 1$ slijedi $a < b + c = 1 - a$,
odnosno $a < \frac{1}{2}$.

Zbog $b \leq a$ vrijedi $\sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$. (1)

Zbog $c \leq b$ vrijedi $b^2 + c^2 \leq b^2 + bc < b^2 + bc + \frac{c^2}{4} = \left(b + \frac{c}{2}\right)^2$,

odnosno $\sqrt{b^2 + c^2} < b + \frac{c}{2}$ (2)

Analogno slijedi $\sqrt{a^2 + c^2} < a + \frac{c}{2}$ (3)

Zbrajanjem dobivenih nejednakosti (1), (2) i (3) slijedi

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + c^2} < \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(b + \frac{c}{2}\right) + \left(a + \frac{c}{2}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Mostar, 30. ožujka 2019.

II. RAZRED

Zadatak 3. Ovisno o realnom parametru a , riješi jednadžbu

$$(a - 1)(1 + x + x^2)^2 = (a + 1)(1 + x^2 + x^4)$$

u skupu realnih brojeva.

RJEŠENJE:

Vrijedi

$$\begin{aligned} 1 + x^2 + x^4 &= (1 + x + x^2)^2 - (2x + 2x^2 + 2x^3) \\ &= (1 + x + x^2)^2 - 2x(1 + x + x^2) \\ &= (1 + x + x^2)[(1 + x + x^2) - 2x]. \end{aligned}$$

Stoga danu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} (a - 1)(1 + x + x^2)^2 &= (a + 1)(1 + x + x^2)[(1 + x + x^2) - 2x] \\ (1 + x + x^2)\{(a - 1) - (a + 1)\}(1 + x + x^2) + 2x(a + 1) &= 0 \\ (1 + x + x^2)[-2(1 + x + x^2) + 2x(a + 1)] &= 0 \\ (1 + x + x^2)(-2 - 2x - 2x^2 + 2ax + 2x) &= 0 \\ (1 + x + x^2)(1 - ax + x^2) &= 0 \end{aligned}$$

Jednadžba $x^2 + x + 1 = 0$ nema realnih rješenja. ($D = 1 - 4 = -3 < 0$).

Diskriminanta jednadžbe $x^2 - ax + 1 = 0$ je $D = a^2 - 4 = (a - 2)(a + 2)$, pa ona ima realna rješenja ako i samo ako je $D \geq 0$ tj.

$$(a - 2)(a + 2) \geq 0 \text{ tj. } a \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

Za $a \in (-2, 2)$ dana jednadžba nema realnih rješenja.

Za $a = 2$ jednadžba ima jedno rješenje, $x = 1$, a za $a = -2$ rješenje je $x = -1$.

Za $a \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ jednadžba ima dva različita rješenja

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Mostar, 30. ožujka 2019.

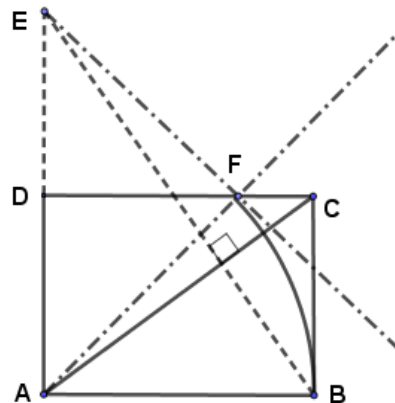
II. RAZRED

Zadatak 4. Dužina \overline{AB} je dulja stranica pravokutnika $ABCD$. Okomica iz vrha B na dijagonalu \overline{AC} siječe pravac AD u točki E , a kružnica sa središtem A koja prolazi kroz točku B siječe \overline{CD} u točki F .

Dokaži da su pravci AF i EF međusobno okomiti

RJEŠENJE:

Neka je $|AB| = a$, $|AD| = b$



Zbog sličnosti pravokutnih trokuta $\triangle EAB$ i $\triangle ABC$ (sukladni kutovi s okomitim kracima) vrijedi $|EA|:|AB| = |AB|:|BC|$ pa je $|EA| = \frac{a^2}{b}$,

Kako je $|AF| = a$, iz pravokutnog trokuta $\triangle ADF$ prema Pitagorinom teoremu dobivamo $|DF|^2 = a^2 - b^2$

Sada iz pravokutnog trokuta $\triangle EDF$ slijedi

$$\begin{aligned} |EF|^2 &= |ED|^2 + |DF|^2 = \left(\frac{a^2}{b} - b\right)^2 + (a^2 - b^2) \\ &= \frac{(a^2 - b^2)^2}{b^2} + a^2 - b^2 = \frac{a^4}{b^2} - 2a^2 + b^2 + a^2 - b^2 \\ &= \frac{a^4}{b^2} - a^2 \end{aligned}$$

Konačno vrijedi $|EF|^2 + |AF|^2 = \left(\frac{a^4}{b^2} - a^2\right) + a^2 = \frac{a^4}{b^2} = |AE|^2$

što znači da je trokut $\triangle AEF$ pravokutan i $AF \perp EF$.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

**NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Mostar, 30. ožujka 2019.**

III. RAZRED

Zadatak 1.

Ako je $x = \operatorname{tg}5^{\circ}$, $y = \operatorname{tg}20^{\circ}$, $z = \operatorname{tg}65^{\circ}$, dokaži da je tada $xy + yz + zx = 1$.

RJEŠENJE:

Neka je $x = \operatorname{tg}5^{\circ}$, $y = \operatorname{tg}20^{\circ}$, $z = \operatorname{tg}65^{\circ}$. Tada je

$$\begin{aligned}x &= \operatorname{tg}5^{\circ} = \operatorname{ctg}85^{\circ} = \operatorname{ctg}(20^{\circ} + 65^{\circ}) = \frac{1}{\operatorname{tg}(20^{\circ} + 65^{\circ})} = \\&= \frac{1}{\frac{\operatorname{tg}20^{\circ} + \operatorname{tg}65^{\circ}}{1 - \operatorname{tg}20^{\circ} \cdot \operatorname{tg}65^{\circ}}} = \\&= \frac{1 - \operatorname{tg}20^{\circ} \cdot \operatorname{tg}65^{\circ}}{\operatorname{tg}20^{\circ} + \operatorname{tg}65^{\circ}} = \frac{1 - yz}{y + z}\end{aligned}$$

Dakle,

$$x = \frac{1 - yz}{y + z}$$

Nakon množenja sa $y + z$ imamo $xy + xz = 1 - yz$

tj. $xy + yz + zx = 1$

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Mostar, 30. ožujka 2019.

III. RAZRED

Zadatak 2. Riješi sustav jednažbi:

$$\begin{aligned}x + y - z &= 2 \\x^2 + y^2 + z^2 &= 6 \\x^3 + y^3 - z^3 &= 8\end{aligned}$$

RJEŠENJE:

Sustav možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned}x + y &= 2 + z \\x^2 + y^2 &= 6 - z^2 \\x^3 + y^3 &= 8 + z^3\end{aligned}$$

Iz prve dvije jednažbe imamo $6 - z^2 = (x + y)^2 - 2xy$ tj.

$$6 - z^2 = 4 + 4z + z^2 - 2xy \text{ tj. } xy = z^2 + 2z - 1.$$

Iz treće jednažbe imamo

$$(x + y)(x^2 + y^2 - xy) = (2 + z)(4 - 2z + z^2),$$

tj.

$$(z + 2)(6 - z^2 - z^2 - 2z + 1) = (z + 2)(4 - 2z + z^2)$$

dalje imamo $(z + 2)(3z^2 - 3) = 0$

Dakle, $z_1 = -2$, $z_2 = -1$, $z_3 = 1$.

1^0 Neka je, $z_1 = -2$. Tada je $x + y = 0$ i $x^2 + y^2 = 2$, Odavde je $y = -x$ i $x = \pm 1$.

Dakle, rješenja su $(-1, 1, -2)$ i $(1, -1, -2)$.

2^0 Neka je $z_1 = -1$. Tada je $x + y = 1$ i $x^2 + y^2 = 5$. Odavde je

$y = 1 - x$ i $x^2 + (1 - x)^2 = 5$, tj. $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ i $y = 1 - x$.

Prema tomu rješenja su $(-1, 2, -1)$ i $(2, -1, -1)$.

3^0 Neka je $z_1 = 1$. Tada je $x + y = 3$ i $x^2 + y^2 = 5$.

Rješenja su $(1, 2, 1)$ i $(2, 1, 1)$

Konačno rješenja sustava su

$$(x, y, z) \in \{(-1, 1, -2), (1, -1, -2), (-1, 2, -1), (2, -1, -1), (1, 2, 1), (2, 1, 1)\}$$

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Mostar, 30. ožujka 2019.

..

III. RAZRED

Zadatak 3. Riješi jednadžbu:

$$|2x - \sin\alpha| + |1 - x + \cos\alpha| = x + 1$$

za razne vrijednosti realnog parametra α

RJEŠENJE:

Imamo četiri mogućnosti

$$1^0 \quad 2x - \sin\alpha \geq 0 \text{ i } \cos\alpha + 1 - x \geq 0 \quad (1)$$

Tada je dana jednadžba ekvivalentna sa

$$2x - \sin\alpha + 1 - x + \cos\alpha = x + 1, \text{ tj.}$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha = 0 \text{ slijedi } \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Zbog (1) slijedi svaki broj $x \in \left[\frac{(-1)^k}{2\sqrt{2}}, 1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}} \right]$ (k cio broj) je rješenje dane jednadžbe

$$2^0 \quad 2x - \sin\alpha \geq 0 \text{ i } \cos\alpha + 1 - x < 0 \quad (2)$$

Tada je dana jednadžba ekvivalentna sa

$$2x - \sin\alpha - 1 + x - \cos\alpha = x + 1, \text{ tj. sa}$$

$$x = 1 + \frac{1}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)$$

Zbog (2) slijedi $\frac{\pi}{4} + 2k\pi < \alpha < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) imamo da je

$$x = 1 + \frac{1}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha) \text{ rješenje dane jednadžbe}$$

$$3^0 \quad 2x - \sin\alpha < 0 \text{ i } \cos\alpha + 1 - x \geq 0 \quad (3)$$

Tada je dana jednadžba ekvivalentna sa

$$-2x + \sin\alpha + 1 - x + \cos\alpha = x + 1, \text{ tj. sa}$$

$$x = \frac{1}{4}(\sin\alpha + \cos\alpha)$$

Zbog (3) slijedi $\frac{\pi}{4} + 2k\pi < \alpha < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) imamo da je

$$x = \frac{1}{4}(\sin\alpha + \cos\alpha) \text{ rješenje dane jednadžbe}$$

$$4^0 \quad 2x - \sin\alpha < 0 \text{ i } \cos\alpha + 1 - x < 0 \quad (4)$$

Tada je dana jednadžba ekvivalentna sa

$$-2x + \sin\alpha - 1 + x - \cos\alpha = x + 1, \text{ tj. sa}$$

$$x = \frac{1}{2}(\sin\alpha - \cos\alpha - 2)$$

No, ovo nije rješenje dane jednadžbe jer ne zadovoljava uvjet (4)

Rezultat:

1) Za $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) dana jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja danih s 1^0

2) Za $\frac{\pi}{4} + 2k\pi < \alpha < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) dana jednadžba ima rješenja iz 2^0 i 3^0 ,

3) Za $\alpha < \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ i $\alpha > -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) dana jednadžba nema rješenja.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

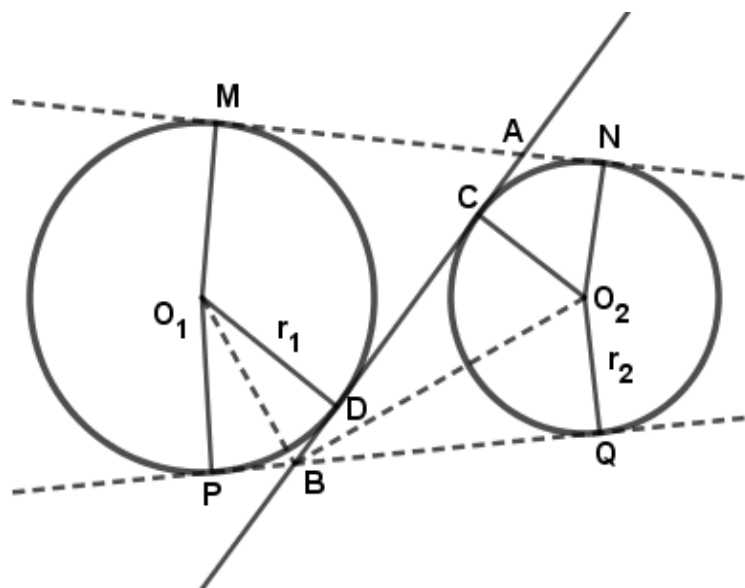
NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Mostar, 30. ožujka 2019.

III. RAZRED

Zadatak 4. U ravni su dane dvije kružnice polumjera r_1 i r_2 , koje se nalaze jedna izvan druge. Konstruirane su obje (zajedničke) vanjske tangente tih kružnica i jedna njihova unutarnja zajednička tangenta. Unutarnja tangenta siječe vanjske tangente u točkama A i B i dodiruje jednu od danih kružnica u točki C .

Dokazati da je $|AC| \cdot |BC| = r_1 \cdot r_2$.

RJEŠENJE:



Uz oznake kao na slici je

$$\sphericalangle DBO_1 = \frac{1}{2} \sphericalangle DBP = \frac{1}{2} (180^\circ - \sphericalangle CBQ) = \frac{1}{2} \sphericalangle CO_2Q = \sphericalangle CO_2B$$

Pa su pravokutni trokuti $\triangle O_1DB$ i $\triangle BCO_2$ slični.

Slijedi da je $\frac{r_1}{|BC|} = \frac{|BD|}{r_2}$, tj. $|BD| \cdot |BC| = r_1 \cdot r_2$.

Dalje, iz sukladnosti vanjskih tangenti $|MN| = |PQ|$, kako je

$$|MN| = |MA| + |AN| = |AD| + |AC| = |CD| + 2|AC| \quad (\text{jednakost tangentskih dužina})$$

$$|PQ| = |PB| + |BQ| = |BD| + |BC| = |CD| + 2|BD| \quad (\text{jednakost tangentskih dužina})$$

Slijedi da je $|AC| = |BD|$. Dakle, $|AC| \cdot |BC| = r_1 \cdot r_2$.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Mostar, 30. ožujka 2019.

IV. RAZRED

Zadatak 1. Nađi sve vrijednosti realnog parametra a tako da nenegativna rješenja
jednadžbe

$$(2a - 1)\sin x + (2 - a)\sin 2x = \sin 3x$$

formiraju beskonačan aritmetički niz.

RJEŠENJE:

Pošto je $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ i $\sin 3x = \sin(x + 2x) = \dots = \sin x(4\cos^2 x - 1)$
mi jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$\sin x[2\cos^2 x - (2 - a)\cos x - a] = 0 \text{ odnosno } \sin x(\cos x - 1)(2\cos x + a) = 0$$

Iz ove jednadžbe slijedi: $\sin x = 0$, $\cos x = 1$ i $\cos x = -\frac{a}{2}$.

Rješenja prve jednadžbe su $x = k\pi$, a druge $x = 2l\pi$, gdje su k i l cijeli brojevi.
Mi tražimo nenegativna rješenja, pa su: $0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots$ nenegativna rješenja
promatrane jednadžbe i vidimo da ona formiraju beskonačan aritmetički niz.

Ostaje vidjeti što je s rješenjima jednadžbe $\cos x = -\frac{a}{2}$

Ako je $|a| > 2$, onda jednadžba $\cos x = -\frac{a}{2}$ nema realnih rješenja. U ovome slučaju
rješenja dane jednadžbe su ona koja smo već ranije našli i ona čine aritmetički niz.

Neka je sada $|a| \leq 2$. Tada jednadžba $\cos x = -\frac{a}{2}$ ima nenegativna rješenja
 $x = x_0 + 2k\pi$ i $x = 2\pi - x_0 + 2k\pi$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$) pri čemu je x_0 rješenje
jednadžbe $\cos x = -\frac{a}{2}$ koje se nalazi u intervalu $[0, \pi]$.

Ako je $x_0 = 0$ ili ako je $x_0 = \pi$, onda je jasno da rješenja dane jednadžbe formiraju
aritmetički niz.

No, tada bi bilo $a = -2$, odnosno $a = 2$.

Neka je $x_0 \neq 0$ i $x_0 \neq \pi$. Tada imamo niz rješenja:

$$0, x_0, \pi, 2\pi - x_0, 2\pi, \dots$$

Da bi ona činila aritmetički niz mora biti $x_0 = \frac{\pi}{2}$. U tom slučaju je $a = 0$.

Dakle, tražene vrijednosti parametra a su $a = 0$ i $|a| \geq 2$.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Mostar, 30. ožujka 2019.

IV. RAZRED

Zadatak 2. Riješi jednađbu: $(x + 1)^{\log_3(x-2)} + 2(x - 2)^{\log_3(x+1)} = 3x^2 + 6x + 3$.

RJEŠENJE:

Odredimo područje definicije jednađbe

$$(x + 1 > 0 \wedge x - 2 > 0) \Leftrightarrow x > 2 \quad (1)$$

Koristeći se identitetom

$$a = 3^{\log_3 a}, \quad (a > 0).$$

Dana jednađba je ekvivalentna s jednađbom

$$3^{\log_3(x-2)\log_3(x+1)} + 2 \cdot 3^{\log_3(x+1)\log_3(x-2)} = 3 \cdot 3^{\log_3(x+1)^2}$$

Dalje slijedi

$$3 \cdot 3^{\log_3(x+1)\log_3(x-2)} = 3 \cdot 3^{\log_3(x+1)^2}$$

$$3^{\log_3(x+1)\log_3(x-2)} = 3^{\log_3(x+1)^2} \quad \text{tj.}$$

$$\log_3(x + 1)\log_3(x - 2) = \log_3(x + 1)^2$$

$$\log_3(x + 1)[\log_3(x - 2) - 2] = 0$$

$$\log_3(x + 1) = 0 \quad \text{ili} \quad \log_3(x - 2) - 2 = 0 \quad \text{tj.}$$

$$x + 1 = 1, \quad x - 2 = 9 \quad \text{tj.}$$

$$x = 0 \quad \text{i} \quad x = 11$$

Zbog (1), rješenje je $x = 11$.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Mostar, 30. ožujka 2019.

IV. RAZRED

Zadatak 3. Riješi jednađbu:

$$|2x - \sin\alpha| + |1 - x + \cos\alpha| = x + 1$$

za razne vrijednosti realnog parametra α

RJEŠENJE:

Imamo četiri mogućnosti

$$1^0 \quad 2x - \sin\alpha \geq 0 \text{ i } \cos\alpha + 1 - x \geq 0 \quad (1)$$

Tada je dana jednađba ekvivalentna sa

$$2x - \sin\alpha + 1 - x + \cos\alpha = x + 1, \text{ tj.}$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha = 0 \text{ slijedi } \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Zbog (1) slijedi svaki broj $x \in \left[\frac{(-1)^k}{2\sqrt{2}}, 1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}} \right]$ (k cio broj) je rješenje dane jednađbe

$$2^0 \quad 2x - \sin\alpha \geq 0 \text{ i } \cos\alpha + 1 - x < 0 \quad (2)$$

Tada je dana jednađba ekvivalentna sa

$$2x - \sin\alpha - 1 + x - \cos\alpha = x + 1, \text{ tj. sa}$$

$$x = 1 + \frac{1}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)$$

Zbog (2) slijedi $\frac{\pi}{4} + 2k\pi < \alpha < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) imamo da je

$$x = 1 + \frac{1}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha) \text{ rješenje dane jednađbe}$$

$$3^0 \quad 2x - \sin\alpha < 0 \text{ i } \cos\alpha + 1 - x \geq 0 \quad (3)$$

Tada je dana jednađba ekvivalentna sa

$$-2x + \sin\alpha + 1 - x + \cos\alpha = x + 1, \text{ tj. sa}$$

$$x = \frac{1}{4}(\sin\alpha + \cos\alpha)$$

Zbog (3) slijedi $\frac{\pi}{4} + 2k\pi < \alpha < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) imamo da je

$$x = \frac{1}{4}(\sin\alpha + \cos\alpha) \text{ rješenje dane jednađbe}$$

$$4^0 \quad 2x - \sin\alpha < 0 \text{ i } \cos\alpha + 1 - x < 0 \quad (4)$$

Tada je dana jednađba ekvivalentna sa

$$-2x + \sin\alpha - 1 + x - \cos\alpha = x + 1, \text{ tj. sa}$$

$$x = \frac{1}{2}(\sin\alpha - \cos\alpha - 2)$$

No, ovo nije rješenje dane jednađbe jer ne zadovoljava uvjet (4)

Rezultat:

1) Za $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) dana jednađba ima beskonačno mnogo rješenja danih s 1^0

2) Za $\frac{\pi}{4} + 2k\pi < \alpha < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) dana jednađba ima rješenja iz 2^0 i 3^0 ,

3) Za $\alpha < \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ i $\alpha > -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) dana jednađba nema rješenja.

q.e.d.

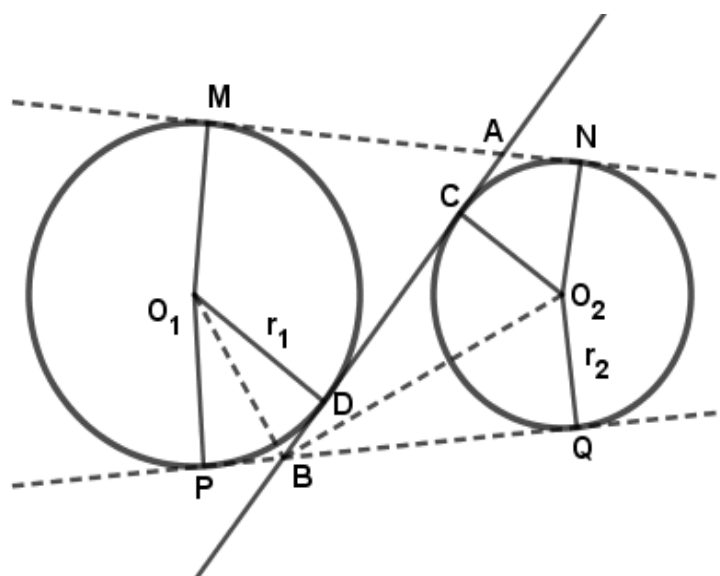
UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Mostar, 30. ožujka 2019.

IV. RAZRED

Zadatak 4. U ravnini su dane dvije kružnice polumjera r_1 i r_2 , koje se nalaze jedna izvan druge. Konstruirane su obje (zajedničke) vanjske tangente tih kružnica i jedna njihova unutarnja zajednička tangenta. Unutarnja tangenta siječe vanjske tangente u točkama A i B i dodiruje jednu od danih kružnica u točki C . Dokazati da je $|AC| \cdot |BC| = r_1 \cdot r_2$.

RJEŠENJE:



Uz oznake kao na slici je

$$\sphericalangle DBO_1 = \frac{1}{2} \sphericalangle DBP = \frac{1}{2} (180^\circ - \sphericalangle CBQ) = \frac{1}{2} \sphericalangle CO_2Q = \sphericalangle CO_2B$$

Pa su pravokutni trokuti $\triangle O_1DB$ i $\triangle BCO_2$ slični.

Slijedi da je $\frac{r_1}{|BC|} = \frac{|BD|}{r_2}$, tj. $|BD| \cdot |BC| = r_1 \cdot r_2$.

Dalje, iz sukladnosti vanjskih tangenti $|MN| = |PQ|$, kako je

$$|MN| = |MA| + |AN| = |AD| + |AC| = |CD| + 2|AC| \quad (\text{jednakost tangentskih dužina})$$

$$|PQ| = |PB| + |BQ| = |BD| + |BC| = |CD| + 2|BD| \quad (\text{jednakost tangentskih dužina})$$

Slijedi da je $|AC| = |BD|$. Dakle, $|AC| \cdot |BC| = r_1 \cdot r_2$.

q.e.d.