UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Žepče, 8. travnja 2017.

Z A D A C I

I. RAZRED

1. **Odredi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe $x^2 + 11^2 = y^2$.**

2. **Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c = 1$. Dokažite da vrijedi nejednakost**

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq \frac{1}{2}$$

3. **Visina $\overline{CD}$ na hipotenuzu $\overline{AB}$ pravokutnog trokuta ΔABC je promjer kružnice k koja siječe katete $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ tog trokuta redom u točkama E i F. Ako je G sjecište pravaca CD i EF i ako vrijedi**
$$|CG|^2 = |CE| \cdot |CF|,$$
koliki su šiljasti kutovi trokuta ΔABC ?

4. **U Kartezijevoj koordinatnoj ravnini skicirajte skup točaka (x, y) koje zadovoljavaju uvjet**
$$\big||x| + |y| - 2\big| \geq 1.$$

SVAKI SE ZADATAK BODUJE S 25 BODOVA.

ŽELIMO TI PUNO USPJEHA NA NATJECANJU!

Natjecateljska komisija

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Žepče, 8. travnja 2017.

Z A D A C I

II. RAZRED

1. **Nađite skup kompleksnih brojeva z za koje je**

$$Im(z^4) = \left(Re(z^2)\right)^2$$

i skicirajte ga u kompleksnoj ravnini.

2. **Odredi, ako postoji, realni parametar k takav da je maksimalna vrijednost funkcije $f_1(x) = (k-8)x^2 - 2(k-5)x + k - 9$ jednaka minimalnoj vrijednosti funkcije**

$$f_2(x) = (k-4)x^2 - 2(k-1)x + k + 7$$

3. **Visina $\overline{CD}$ na hipotenuzu $\overline{AB}$ pravokutnog trokuta ΔABC je promjer kružnice k koja siječe katete $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ tog trokuta redom u točkama E i F. Ako je G sjecište pravaca CD i EF i ako vrijedi**

$$|CG|^2 = |CE| \cdot |CF|,$$

koliki su šiljasti kutovi trokuta ΔABC ?

4. **Nađite sve parove cijelih brojeva a i b za koje vrijedi**

$$7a + 14b = 5a^2 + 5ab + 5b^2.$$

SVAKI SE ZADATAK BODUJE S 25 BODOVA.

ŽELIMO TI PUNO USPJEHA NA NATJECANJU!

Natjecateljska komisija

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Žepče, 8. travnja 2017.

Z A D A C I

III. RAZRED

Zadatak 1. **Riješite jednadžbu** $4^{xarcsinx} + 4^{xarccosx} = 2^{\frac{2+\pi x}{2}}$.

Zadatak 2. **Dokazati da za svaki realan broj x vrijedi nejednakost**

$sin(cosx) < cos(sinx)$.

Zadatak 3. **Oko kugle je opisan uspravni krnji stožac. Dokazati da je odnos volumena kugle i stošca jednak odnosu oplošja kugle i stošca.**

Zadatak 4. **Matematičar se izgubio u šumi koja ima oblik beskonačne trake širine 1 km. Pokazati da matematičar može izabrati takav način kretanja koji će ga izvesti iz šume poslije najviše $2\sqrt{2}$km pređenog puta.**

SVAKI ZADATAK SE BODUJE S 25 BODOVA.

ŽELIMO TI PUNO USPJEHA NA OVOM NATJECANJU.

Natjecateljska komisija.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Žepče, 8. travnja 2017..

Z A D A C I

IV. RAZRED

1. **Za koje realne parametre a postoji kompleksan broj z takav da je**

   $$|z+\sqrt{2}| = \sqrt{a^2-3a+2} \quad \text{i} \quad |z+i\sqrt{2}| < a \ ?$$

2. **Duljine stranica trokuta su tri uzastopna prirodna broja, a jedan od kutova trokuta je dvaput veći od jednog od preostalih dvaju kutova. Odredi duljine stranica trokuta.**

3. **Neka su a i b realni brojevi veći od 1 takvi da su brojevi $log_b a$, $log_{2b}(2a)$ i $log_{4b}(4a)$, u tom poretku, uzastopni članovi aritmetičkog niza.**
   Dokaži da su brojevi a i b jednaki.

4. **Oko kugle je opisan uspravni krnji stožac. Dokazati da je odnos volumena kugle i stošca jednak odnosu oplošja kugle i stošca.**

SVAKI SE ZADATAK BODUJE S 25 BODOVA.

ŽELIMO TI PUNO USPJEHA NA NATJECANJU!

Natjecateljska komisija

<u>UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR</u>

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Žepče, 8. travnja 2017.

I. RAZRED

<u>Zadatak 1</u>. Odredi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe $x^2 + 11^2 = y^2$.

<u>RJEŠENJE</u>

Zadana jednakost ekvivalentna je s

$$11^2 = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$$

Kako je 11 prost broj, broj $y - x$ poprima jednu od vrijednosti $\pm 1, \pm 11$ ili $\pm 11^2$.

a) **Neka je $y - x = 1$, tada je $x + y = 11^2$. Rješenje ovog sustava je $x = 60, y = 61$.**
Ako je $y - x = -1$, tada je $x + y = -11^2$. Rješenje ovog sustava je
$x = -60, \quad y = -61$.

b) **Neka je $y - x = 11$, tada je $x + y = 11$. Rješenje ovog sustava je $x = 0, y = 11$.**
Ako je $y - x = -11$, tada je $x + y = -11$. Rješenje ovog sustava je
$x = 0, y = -11$

c) **Neka je $y - x = 11^2$. tada je $x + y = 1$. Rješenje ovog sustava je**
$x = -60, y = 61$.
Ako je $y - x = -11^2$. tada je $x + y = -1$. Rješenje ovog sustava je
$x = 60, y = -61$.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Žepče, 8. travnja 2017.

I. RAZRED

Zadatak 2. **Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=1$. Dokažite da vrijedi nejednakost**

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\geq\frac{1}{2}$$

RJEŠENJE

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}=$$

$$=\left(a-\frac{ab^2}{a^2+b^2}\right)+\left(b-\frac{bc^2}{b^2+c^2}\right)+\left(c-\frac{ca^2}{c^2+a^2}\right)=$$

$$=a-\frac{b}{2}\cdot\frac{2ab}{a^2+b^2}+b-\frac{c}{2}\cdot\frac{2bc}{b^2+c^2}+c-\frac{a}{2}\cdot\frac{2ca}{c^2+a^2}\geq$$

$$\geq a-\frac{b}{2}+b-\frac{c}{2}+c-\frac{a}{2}=\frac{a+b+c}{2}=\frac{1}{2}$$

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Žepče, 8. travnja 2017.

I. RAZRED

Zadatak 3. Visina $\overline{CD}$ na hipotenuzu $\overline{AB}$ pravokutnog trokuta ΔABC je promjer kružnice k koja siječe katete $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ tog trokuta redom u točkama E i F. Ako je G sjecište pravaca CD i EF i ako vrijedi

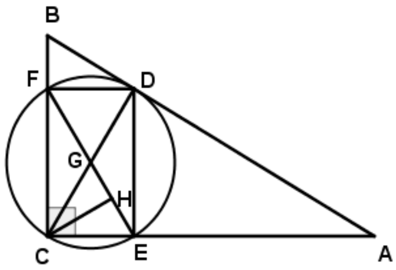
$$|CG|^2 = |CE| \cdot |CF|,$$

koliki su šiljasti kutovi trokuta ΔABC ?

RJEŠENJE

Možemo pretpostaviti da je $\alpha \leq \beta$. Kako je $< CED =< CFD = 90^0$ (Talesov teorem), četverokut $CEDF$ je pravokutnik, pa je

$$|CG| = |GE| = |GF| \qquad (1)$$



Neka je $\overline{CH}$ visina na hipotenuzu $\overline{EF}$ pravokutnog trokuta ΔEFC. Vrijedi

$$2P_{\Delta EFC} = |CE| \cdot |CF| = |EF| \cdot |CH|$$

Pa je zbog uvjeta zadatka

$$|CG|^2 = |EF| \cdot |CH| = 2|CG| \cdot |CH|, \text{ a zbog } (1)$$

$$|CG|^2 = 2|CG| \cdot |CH|, \text{ odnosno}$$
$$|CG| = 2|CH|$$

Zbog zadnje relacije $< HCG = 60^0$ i $< HGC = 30^0$, pa slijedi

$$< ACD =< GCE = \frac{1}{2}(180^0 - 30^0) = 75^0$$

$$\alpha =< CAD = 90^0 -< ACD = 90^0 - 75^0 = 15^0$$

$$\beta = 90^0 - \alpha = 90^0 - 15^0 = 75^0$$

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Žepče, 8. travnja 2017.

I. RAZRED

Zadatak 4. **U Kartezijevoj koordinatnoj ravnini skicirajte skup točaka (x, y) koje zadovoljavaju uvjet**

$$\big||x| + |y| - 2\big| \geq 1.$$

RJEŠENJE

Moramo promatrati dva slučaja

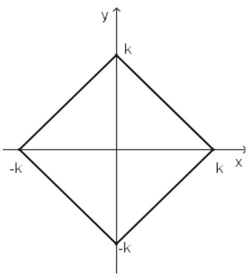
$1^0 \quad |x| + |y| - 2 \geq 1$ **ili** $2^0 \quad |x| + |y| - 2 \leq -1$

$|x| + |y| \geq 3 \qquad\qquad |x| + |y| \leq 1$

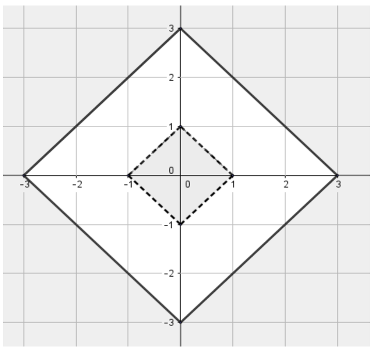
Skicirajmo skup točaka za koje je $|x| + |y| = k,\ k \in N$. Ovdje moramo promatrati četiri slučaja:

1) $x \geq 0, \quad y \geq 0 \Rightarrow x + y = k$
2) $x \leq 0, \quad y \geq 0 \Rightarrow -x + y = k$
3) $x \leq 0, \quad y \leq 0 \Rightarrow -x - y = k$
4) $x \geq 0, \quad y \leq 0 \Rightarrow x - y = k$

Traženi skup točaka je kvadrat s vrhovima u točkama $(\pm k, \pm k)$



Prvu nejednakost zadovoljavaju točke izvan ili na rubu kvadrata s vrhovima u točkama $(\pm 3, \pm 3)$. Druga je zadovoljena za točke unutar ili na rubu kvadrata s vrhovima u točkama $(\pm 1, \pm 1)$



q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Žepče, 8. travnja 2017.

II. RAZRED

Zadatak 1. **Nađite skup kompleksnih brojeva z za koje je**

$$Im(z^4) = \left(Re(z^2)\right)^2$$

i skicirajte ga u kompleksnoj ravnini.

RJEŠENJE

Neka je $z = x + yi$. Tada je $z^2 = x^2 + 2xyi$,

$$z^4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + (4x^3y - 4xy^3) \cdot i$$

Tada iz uvjeta $Im(z^4) = \left(Re(z^2)\right)^2$ slijedi

$$4x^3y - 4xy^3 = (x^2 - y^2)^2$$

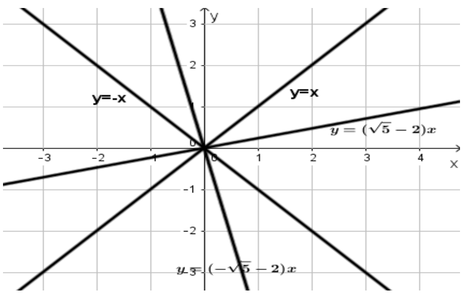
$$4xy(x^2 - y^2) - (x^2 - y^2)^2 = 0$$

$$(x^2 - y^2)(4xy - x^2 + y^2) = 0$$

Sada moramo promatrati dva slučaja: 1^0 $y^2 = x^2$, i 2^0 $y^2 + 4xy - x^2 = 0$
U prvom slučaju je $y = \pm x$, i zadovoljavaju sve točke pravaca $y = \pm x$.
U drugom slučaju, podijelivši jednadžbu sa x^2, dobivamo kvadratnu jednadžbu po $\frac{y}{x}$,

$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 4\left(\frac{y}{x}\right) - 1 = 0$, **čija rješenja su**

$\frac{y}{x} = -2 \pm \sqrt{5}$. **Time smo dobili još dva pravca $y = \left(-2 \pm \sqrt{5}\right)x$**



Traženi skup točaka su četiri pravca skicirana na slici.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Žepče, 8. travnja 2017.

II. RAZRED

Zadatak 2. **Odredi, ako postoji, realni parametar k takav da je maksimalna vrijednost funkcije $f_1(x) = (k-8)x^2 - 2(k-5)x + k - 9$ jednaka minimalnoj vrijednosti funkcije**

$$f_2(x) = (k-4)x^2 - 2(k-1)x + k + 7$$

RJEŠENJE

Da bi funkcija $f_1(x)$ imala maksimum, mora biti $k - 8 < 0$, tj. $k < 8$,
a da bi funkcija $f_2(x)$ imala minimum, mora biti $k - 4 < 0$, tj. $k < 4$.

Maksimalna vrijednost funkcije $f_1(x)$ je $\frac{4(k-8)(k-9)-4(k-5)^2}{4(k-8)}$,
tj. $maxf_1(x) = \frac{47-7k}{k-8}$, $(x \in R)$.
Minimalna vrijednost funkcije $f_2(x)$ je $\frac{4(k-4)(k+7)-4(k-1)^2}{4(k-4)}$
tj. $min\, f_2(x) = \frac{5k-29}{k-4}$

Ekstremne vrijednosti tih funkcija se podudaraju pa vrijedi

$$\frac{47-7k}{k-8} = \frac{5k-29}{k-4}.$$

Sređivanjem dobivamo kvadratnu jednadžbu $k^2 - 12k + 35 = 0$
čija su rješenja $k = 5$, $k = 7$.
Oba broja zadovoljavaju uvjete $(4 < k < 8)$, pa su to traženi parametri.

q.e.d.

<u>UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR</u>

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Žepče, 8. travnja 2017.

<u>II. RAZRED</u>

<u>Zadatak 3</u>. Visina $\overline{CD}$ na hipotenuzu $\overline{AB}$ pravokutnog trokuta ΔABC je promjer kružnice k koja siječe katete $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ tog trokuta redom u točkama E i F. Ako je G sjecište pravaca CD i EF i ako vrijedi

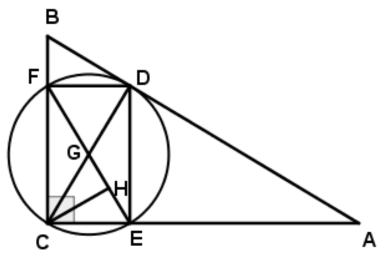
$$|CG|^2 = |CE| \cdot |CF|,$$

koliki su šiljasti kutovi trokuta ΔABC ?

<u>RJEŠENJE</u>

Možemo pretpostaviti da je $\alpha \leq \beta$. Kako je $< CED =< CFD = 90^0$ (Talesov teorem), četverokut $CEDF$ je pravokutnik, pa je

$$|CG| = |GE| = |GF| \qquad (1)$$



Neka je $\overline{CH}$ visina na hipotenuzu $\overline{EF}$ pravokutnog trokuta ΔEFC. Vrijedi

$$2P_{\Delta EFC} = |CE| \cdot |CF| = |EF| \cdot |CH|$$

Pa je zbog uvjeta zadatka

$$|CG|^2 = |EF| \cdot |CH| = 2|CG| \cdot |CH|, \text{ a zbog } (1)$$

$$|CG|^2 = 2|CG| \cdot |CH|, \text{ odnosno}$$
$$|CG| = 2|CH|$$

Zbog zadnje relacije $< HCG = 60^0$ i $< HGC = 30^0$, pa slijedi

$$< ACD =< GCE = \frac{1}{2}(180^0 - 30^0) = 75^0$$

$$\alpha =< CAD = 90^0 -< ACD = 90^0 - 75^0 = 15^0$$

$$\beta = 90^0 - \alpha = 90^0 - 15^0 = 75^0$$

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Žepče, 8. travnja 2017.

II. RAZRED

Zadatak 4. **Nađite sve parove cijelih brojeva a i b za koje vrijedi**

$$7a + 14b = 5a^2 + 5ab + 5b^2.$$

RJEŠENJE

Jednadžbu napišimo kao kvadratnu jednadžbu po b:

$$5b^2 + (5a - 14)b + 5a^2 - 7a = 0,$$

čija su rješenja

$$b_{1,2} = \frac{14-5a \pm \sqrt{(5a-14)^2-20(5a^2-7a)}}{10} = \frac{14-5a \pm \sqrt{196-75a^2}}{10}. \quad (1)$$

Da bi rješenja bile realna, mora biti $196 - 75a^2 \geq 0$ **tj.**

$$a^2 \leq \frac{196}{75} \Leftrightarrow |a| \leq \frac{14}{5\sqrt{3}}.$$

Dakle, $-\frac{14}{5\sqrt{3}} \leq a \leq \frac{14}{5\sqrt{3}}$.

Budući da a mora biti cijeli broj, može biti samo $a \in \{-1, 0, 1\}$.
Uvrštavanjem tih vrijednosti u (1) dobivamo:

$$1^0 \quad a = -1 \Rightarrow b_1 = 3,\ b_2 \notin Z$$
$$2^0 \quad a = 0 \Rightarrow b_1 = 0,\ b_2 \notin Z$$
$$3^0 \quad a = 1 \Rightarrow b_1 = 2,\ b_2 \notin Z$$

Rješenja dane jednadžbe su $(a, b) \in \{(-1, 3),\ (0, 0),\ (1, 2)\}$.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Žepče, 8. travnja 2017.

III. RAZRED

Zadatak 1. **Riješite jednadžbu** $4^{xarcsinx} + 4^{xarccosx} = 2^{\frac{2+\pi x}{2}}$ **.**

RJEŠENJE:

$D: x \in [-1, 1]$

Kako za svako $x \in [-1, 1]$ **vrijedi** $arcsinx + arccosx = \frac{\pi}{2}$ **slijedi da je**

$$4^{xarcsinx} + 4^{x\left(\frac{\pi}{2} - arcsinx\right)} = 2^{\frac{2+\pi x}{2}}.$$

Množeći jednažbu sa $4^{xarcsinx}$ **dobijemo**

$$(4^{xarcsinx})^2 - 2 \cdot 4^{xarcsinx} \cdot 2^{\frac{\pi x}{2}} + \left(2^{\frac{\pi x}{2}}\right)^2 = 0$$

$$\left(4^{xarcsinx} - 2^{\frac{\pi x}{2}}\right)^2 = 0$$

$$4^{xarcsinx} - 2^{\frac{\pi x}{2}} = 0$$

$$2^{2xarcsinx} = 2^{\frac{\pi x}{2}}.$$

Slijedi da je

$$2xarcsinx = \frac{\pi x}{2},$$

odnosno $x = 0 \ \vee \ arcsinx = \frac{\pi}{4}$.

Znači, rješenja su $x \in \left\{0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH

Žepče, 8. travnja 2017.

III. RAZRED

Zadatak 2. **Dokazati da za svaki realan broj x vrijedi nejednakost**

$$\sin(\cos x) < \cos(\sin x).$$

RJEŠENJE:

Neka $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, i neka je $\cos x = y$.
Kako je $\sin z < z$ za $0 < z < 1$, to je

$$\sin(\cos x) < \cos x. \qquad (1)$$

Na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ $\cos x$ je opadajuća, pa iz $\sin x \le x$ slijedi da je

$$\cos x \le \cos(\sin x). \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) $\Rightarrow \sin(\cos x) < \cos(\sin x), \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Za $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ je $\sin(\cos x) \le 0 < \cos(\sin x)$, tj. nejednakost vrijedi.

S obzirom da su $\sin(\cos x)$ i $\cos(\sin x)$ parne funkcije, nejednakost vrijedi i na intervalu $[-\pi, \pi]$, a kako su i periodične, s periodom 2π slijedi da nejednakost vrijedi za $\forall x \in R$.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH

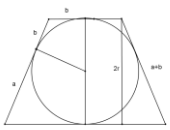
Žepče, 8. travnja 2017.

III. RAZRED

Zadatak 3. **Oko kugle je opisan uspravni krnji stožac. Dokazati da je odnos volumena kugle i stošca jednak odnosu oplošja kugle i stošca.**

RJEŠENJE:

Presjek danog krnjeg stošca i ravnine koja prolazi kroz središta baza okomito na njih je jednakokračni trapez u koji možemo upisati krug.



Neka su a i b redom polumjeri veće i manje baze stošca, a r polumjer kugle upisane u stožac. Tada su osnovice trapeza $2a$ i $2b$, a visina 2r.
Kako je trapez tangentni, to je duljina njegovog kraka a+b.
Primjenom Pitagorinog poučka
$(a+b)^2=(a-b)^2+(2r)^2$,
$r^2=ab$.

Volumen krnjeg stošca je $V_S=\frac{2r(a^2+ab+b^2)\pi}{3}$,

a kugle $V_K=\frac{4r^3\pi}{3}$,

te je $\frac{V_S}{V_K}=\frac{a^2+ab+b^2}{2ab}$.

Pošto je duljina kraka trapeza $a+b$, oplošje stošca je

$$O_S=\left(a^2+b^2+(a+b)(a+b)\right)\pi=2(a^2+ab+b^2)\pi\,,$$

a kugle $O_K=4r^2\pi$, te je omjer

$$\frac{O_S}{O_K}=\frac{a^2+ab+b^2}{2ab}=\frac{V_S}{V_K}.$$

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH

Žepče, 8. travnja 2017.

III. RAZRED

Zadatak 4. **Matematičar se izgubio u šumi koja ima oblik beskonačne trake širine 1km. Pokazati da matematičar može izabrati takav način kretanja koji će ga izvesti iz šume poslije najviše $2\sqrt{2}$km pređenog puta.**

RJEŠENJE:

Polazeći iz proizvoljne točke A, matematičar se kreće pravocrtno u proizvoljnom smjeru $\sqrt{2}$ km, do neke točke B, a zatim skrene pod pravim kutom i opet se kreće pravocrtno $\sqrt{2}$ km do neke točke C.

Sad lako pokazujemo da bar jedna od tri točke A,B,C nije u šumi.

Pretpostavimo suprotno, tj. da se točke A,B,C nalaze unutar trake široke 1km.

Povučemo visinu BB_1 iz vrha B pravokutnog trokuta. Njena duljina je 1km.

Promatrajmo okomicu iz B na granice trake. Neka ona siječe hipotenuzu AC u točki B', a granične pravce trake u točkama P i Q.

Tada je

$$1 = |BB_1| \leq |BB'| < |PQ|,$$

tj. $1 < |PQ|$, što je kontadikcija.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Žepče, 8. travnja 2017..

IV. RAZRED

Zadatak 1 **Za koje realne parametre a postoji kompleksan broj z takav da je**

$$\left|z+\sqrt{2}\right| = \sqrt{a^2-3a+2} \quad \text{i} \quad \left|z+i\sqrt{2}\right| < a \ ?$$

RJEŠENJE

Prema prvom uvjetu je $a^2-3a+2 \geq 0$ tj. $a \leq 1$ ili $a \geq 2$,
prema drugom, $a > 0$. Iz ova dva uvjeta slijedi $0 < a \leq 1$ ili $a \geq 2$.
Jednakost $\left|z+\sqrt{2}\right|^2 = a^2-3a+2$ zadovoljavaju svi kompleksni brojevi $z = x + yi$ za koje je $\left(x+\sqrt{2}\right)^2 + y^2 = a^2-3a+2$.
Ovaj uvjet zadovoljavaju sve točke kružnice sa središtem u $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$ polumjera $\sqrt{a^2-3a+2}$.
Nejednakost $\left|z+i\sqrt{2}\right|^2 < a^2$ zadovoljavaju svi kompleksni brojevi $z = x + yi$ za koje je

$$x^2 + \left(y+\sqrt{2}\right)^2 < a^2,$$

a to su svi kompleksni brojevi (strogo) unutar kružnice sa središtem u točki $\left(0, -\sqrt{2}\right)$ polumjera a
Udaljenost središta je $d = 2$.
Kompleksan broj z koji zadovoljava uvjete zadatka, tj. leži na prvoj i unutar druge kružnice postojat će ako je udaljenost središta tih dviju kružnica manja od zbroja polumjera kružnica. Dakle,

$$2 < \sqrt{a^2-3a+2} + a \quad \text{tj.} \quad 2 - a < \sqrt{a^2-3a+2}.$$

Ako je $a > 2$, uvjet je ispunjen.
Slučaj $a = 2$ ne zadovoljava uvjet.
Ako je $0 < a \leq 1$, onda nakon kvadriranja i sređivanja dobivamo $a > 2$, što je suprotno pretpostavci.
Prema tome, rješenje je $a > 2$.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Žepče, 8. travnja 2017..

IV. RAZRED

Zadatak 2. **Duljine stranica trokuta su tri uzastopna prirodna broja, a jedan od kutova trokuta je dvaput veći od jednog od preostalih dvaju kutova. Odredi duljine stranica trokuta.**

RJEŠENJE:

Neka je $a = n - 1$, $b = n$, $c = n + 1$. Tada je $\alpha < \beta < \gamma$. Moguća su tri slučaja

$1^0 \quad \beta = 2\alpha$

Koristeći poučak o sinusima i kosinusov poučak dobivamo:

$$cos\alpha = \frac{sin2\alpha}{2sin\alpha} = \frac{sin\beta}{2sin\alpha} = \frac{b}{2a} = \frac{n}{2(n-1)}, \quad cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{n+4}{2(n+1)}$$

Iz jednadžbe $\frac{n}{2(n-1)} = \frac{n+4}{2(n+1)}$ **dobivamo** $n = 2$. **Stranice trokuta bi bile** $1, 2$ **i** 3, **što nije moguće.**

$2^0 \quad \gamma = 2\alpha$

Slično kao u prethodnom slučaju dobili bismo:

$$cos\alpha = \frac{sin2\alpha}{2sin\alpha} = \frac{sin\gamma}{2sin\alpha} = \frac{n+1}{2(n-1)}, \quad cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{n+4}{2(n+1)}$$

Iz jednadžbe $\frac{n+1}{2(n-1)} = \frac{n+4}{2(n+1)}$ **se dobiva** $n = 5$ **i duljine stranica trokuta su** $4, 5$ **i** 6.

$3^0 \quad \gamma = 2\beta$

Ponavljanjem postupka iz prethodnih dvaju slučajeva dobivamo

$$cos\beta = \frac{sin2\beta}{2sib\beta} = \frac{sin\gamma}{2sin\beta} = \frac{n+1}{2n}, \quad cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{n^2+2}{2(n^2-1)}$$

Iz jednadžbe $\frac{n+1}{2n} = \frac{n^2+2}{2(n^2-1)}$ **dobivamo kvadratnu jednadžbu** $n^2 - 3n - 1 = 0$ **čija su**

rješenja $n_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$ **su iracionalna.**

Dakle, jedino rješenje je trokut sa stranicama duljina $4, 5$ **i** 6..

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Žepče, 8. travnja 2017..

IV. RAZRED

Zadatak 3 Neka su a i b realni brojevi veći od 1 takvi da su brojevi $log_b a$, $log_{2b}(2a)$ i $log_{4b}(4a)$, u tom poretku, uzastopni članovi aritmetičkog niza. Dokaži da su brojevi a i b jednaki.

RJEŠENJE

Činjenicu da $log_b a$, $log_{2b}(2a)$ i $log_{4b}(4a)$ čine aritmetički niz možemo zapisati kao:

$$log_{2b}(2a) = \frac{1}{2}\left(log_b a + log_{4b}(4a)\right)$$

Kako vrijedi $log_x y = \frac{log_2 y}{log_2 x}$, dalje imamo

$$2 \cdot \frac{log_2(2a)}{log_2(2b)} = \frac{log_2 a}{log_2 b} + \frac{log_2(4a)}{log_2(4b)}$$

$$2 \cdot \frac{1 + log_2 a}{1 + log_2 b} = \frac{log_2 a}{log_2 b} + \frac{2 + log_2 a}{2 + log_2 b}$$

Radi jednostavnijeg zapisa uvedimo supstituciju $A = log_2 a$, $B = log_2 b$.
Tada je

$$2 \cdot \frac{1 + A}{1 + B} = \frac{A}{B} + \frac{2 + A}{2 + B}$$

Pomnožimo tu jednakost s $B(1 + B)(2 + B)$ i sredimo:

$$2B(2 + B)(1 + A) = A(1 + B)(2 + B) + (2 + A)B(1 + B)$$

$$4B + 4AB + 2B^2 + 2AB^2 = 2A + 2AB + AB + AB^2 + 2B + 2B^2 + AB + AB^2$$

Konačno dobivamo $A = B$,

tj. $log_2 a = log_2 b$ pa je $a = b$ što je i trebalo dokazati.

q.e.d.

UDRUGA MATEMATIČARA RUĐERA BOŠKOVIĆA MOSTAR

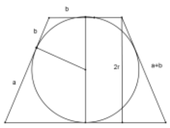
NATJECANJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA U FBiH
Žepče, 8. travnja 2017..

IV. RAZRED

Zadatak 4. Oko kugle je opisan uspravni krnji stožac. Dokazati da je odnos volumena kugle i stošca jednak odnosu oplošja kugle i stošca.

RJEŠENJE

Presjek danog krnjeg stošca i ravnine koja prolazi kroz središta baza okomito na njih je jednakokračni trapez u koji možemo upisati krug.



Neka su a i b redom polumjeri veće i manje baze stošca, a r polumjer kugle upisane u stožac. Tada su osnovice trapeza $2a$ i $2b$, a visina 2r.
Kako je trapez tangentni, to je duljina njegovog kraka a+b.
Primjenom Pitagorinog poučka
$(a+b)^2 = (a-b)^2 + (2r)^2$,
$r^2 = ab$.

Volumen krnjeg stošca je $V_S = \frac{2r(a^2+ab+b^2)\pi}{3}$,

a kugle $V_K = \frac{4r^3\pi}{3}$,

te je $\frac{V_S}{V_K} = \frac{a^2+ab+b^2}{2ab}$.

Pošto je duljina kraka trapeza $a+b$, oplošje stošca je

$$O_S = \left(a^2 + b^2 + (a+b)(a+b)\right)\pi = 2(a^2+ab+b^2)\pi\,,$$

a kugle $O_K = 4r^2\pi$, te je omjer

$$\frac{O_S}{O_K} = \frac{a^2+ab+b^2}{2ab} = \frac{V_S}{V_K}.$$

q.e.d.